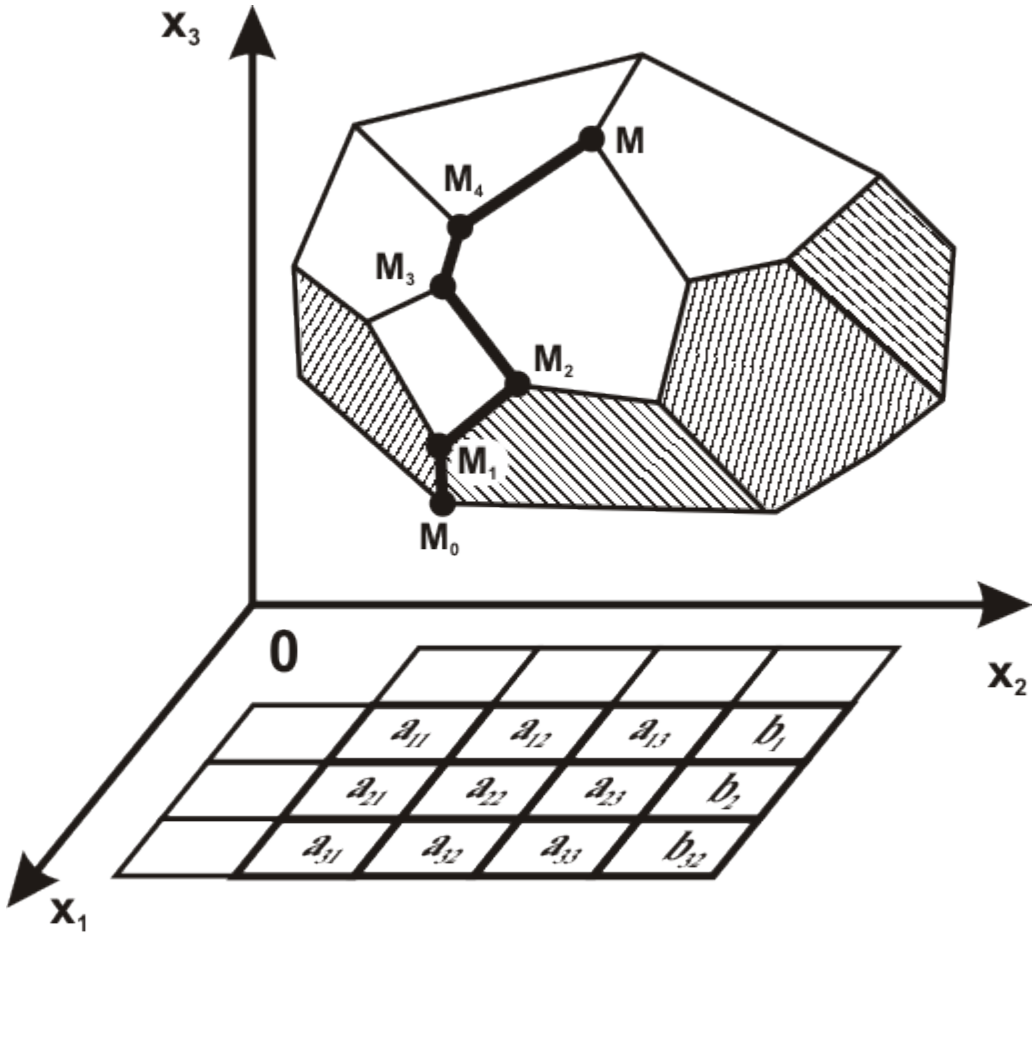
С.Д. Старыгина, Е.А. Печеный, Н.К. Нуриев

Исследование операций: математическое программирование

подготовка IT инженеров в метрическом компетентностном формате (обучение в техногенной среде)



Казань 2016

УДК
ББК

Рецензенты:
д.т.н., профессор В.И. Заботин
д.п.н., профессор Е.А. Корчагин

Старыгина С. Д.

Исследование операций: математическое программирование: учеб. пособие / С.Д. Старыгина, Е.А. Печеный, Н.К. Нуриев. – Казань: Отечество, 2016. – 296 с.

Учебное пособие является эскизным проектом электронного обучения и предназначено для подготовки IT-инженеров в метрическом компетентностном формате в техногенной образовательной среде (ТОС).

Программное обеспечение, поддерживающее автоматизированный процесс обучения в ТОС, развернуто в Web-сети.

Учебное пособие, также может быть успешно использовано при классической организации подготовки студентов по всем инженерным направлениями.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 15-07-05761)

© Старыгина С.Д., Печеный Е.А., Нуриев Н.К., 2016

Оглавление

Введение

Системный анализ и исследование операций. Системный анализ это методология, т.е. наука об организации деятельности по решению сложных проблем прогнозирования, планирования, проектирования, конструирования, управления, принятия решений и т. п.

Эффективность решения проблем с помощью системного анализа определяется структурой решаемых проблем.

По предложенной обобщенной классификации Г. Саймона, все проблемы можно разделить на три класса:

1) структурированные или количественно формализованные проблемы, где значимые связи и зависимости выражены через символы;

2) неструктированные или качественно выраженные проблемы, содержащие лишь описание факторов, количественные связи и зависимости между которыми не установлены;

3) смешанные проблемы, которые содержат как количественное, так и качественное описание факторов с частично установленными связями между ними.

Для решения структурированных, т.е. количественно выражаемых проблем используется методология исследование операций, которая через построение адекватных математических моделей и решения задач линейного, нелинейного, целочисленного, динамического программирований, а также задач теории игр, массового обслуживания с применением методов отыскания оптимальной стратегии управления целенаправленными действиями, позволяет найти решения для многих этих проблем.

Проблема оптимального планирования. В деятельности человека всегда возникает проблема нахождения наилучшего (оптимального) плана для достижения определенной цели при ограниченных ресурсах. Объектом планирования может быть деятельность отдельного человека, предприятия, отрасли промышленности, региона, государства и т.д.

В целом, проблема планирования выглядит следующим образом:

1. Имеется набор плановых показателей $x_1, x_2, x_3,...,x_n$.

2. Имеется набор ресурсов $R_1, R_2, R_3,\ldots,$ R, за счет чего эти плановые показатели могут быть достигнуты, и также заданы ограничения по каждому из видов ресурсов.

3. Определена цель, зависящая от значений плановых показателей.

Оптимальным планом будет набор плановых показателей, при которых достигается цель.

Рассмотрим пример проблемы.

Предприятие имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов разного рода: сырье, оборудование и т.п. допустим, что ресурсы трех видов R_1, R_2, R_3 имеются в количестве соответственно b_1, b_2, b_3 условных единиц. Предприятие выпускает два вида товаров T_1, T_2, причем известно, сколько единиц каждого ресурса требуется для производства одной единицы каждого товара. Пусть a_{ij} – число единиц ресурса $R_i (i = 1, 2, 3)$, необходимое для производства единицы товара $T_j (j = 1, 2)$. Известно, что доход, получаемый предприятием от единицы каждого вида товаров, соответственно равен c_1, c_2. Требуется при данных ресурсах выпустить такую комбинацию товаров, при которых доход предприятия оказался бы максимальным.

Формализация проблемы. Обозначим через x_1, x_2 соответственно количества товаров T_1, T_2. Очевидно, доход предприятия представимо как

$$S = c_1x_1 + c_2x_2.$$

Общее количество ресурса R_1, используемого при выпуске обоих товаров, равно

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2.$$

Оно не должно превышать запаса b_1, т.е.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1.$$

Вообще, количество ресурса $R_i(i\ 1,2,3)$ используемого при выпуске обоих товаров, равное $a_{i1}x_1\ a_{i2}x_2$, не должно превосходить b_i, т.е. должно выполняться неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Итак, в итоге формализации проблемы приходим к задаче о распределении ресурсов. В математической постановке мы приходим к задаче линейного программирования, т.е. задача состоит в отыскании неизвестных x_1, x_2 (нахождении оптимального плана), при которых линейная функция

$$S = c_1x_1 + c_2x_2$$

достигает наибольшего (максимального) значения S и удовлетворяет условиям (линейным ограничениям)

$$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3 \end{cases}$$

Пример. На предприятии выпускаются изделий двух типов, производственная мощность цеха сборки составляет 100 изделий первого или 300 изделий второго типа в сутки. Отдел технического контроля в состоянии проверить не более 150 изделий (первого или второго типа) в сутки. Известно, что изделие первого в два раза дороже, чем изделие второго типа.

Требуется найти оптимальный выпуск изделий, т.е. определить план x_1 – количества изделий первого и x_2 – количества изделий второго типов, которые должно выпустить предприятие, чтобы обеспечить себе максимальную прибыль.

Величина прибыли предприятия за сутки можно записать так:

$$S(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2.$$

Из описания проблемной ситуации следует, что вместо одного изделий первого типа предприятие может выпускать три изделий второго типа. Следовательно, вся продукция цеха в перерасчете на изделие второго типа составляет $3x_1 + x_2$ штук в сутки и это число не должно превышать 300, т.е.

$$3x_1 + x_2 \le 300.$$

Возможности отдела технического контроля можно записать так

$$x_1 + x_2 \le 150.$$

В целом, в результате формализации проблемной ситуации, получаем следующую математическую модель (задачу линейного программирования):

$$2x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ 3x_1 + x_2 \le 300 \\ x_1 + x_2 \le 150 \end{cases}$$

Рассмотрим геометрическое решение этой задачи. Исходя из неравенств, вначале построим прямые линии

$$x_1 = \frac{1}{3}x_2 + 100,$$

$$x_2 = -x_1 + 150.$$

Затем отобразим эти прямые в декартовой системе координат и построим ограниченное системой линейных неравенств допустимое множество D (рис. В.1)

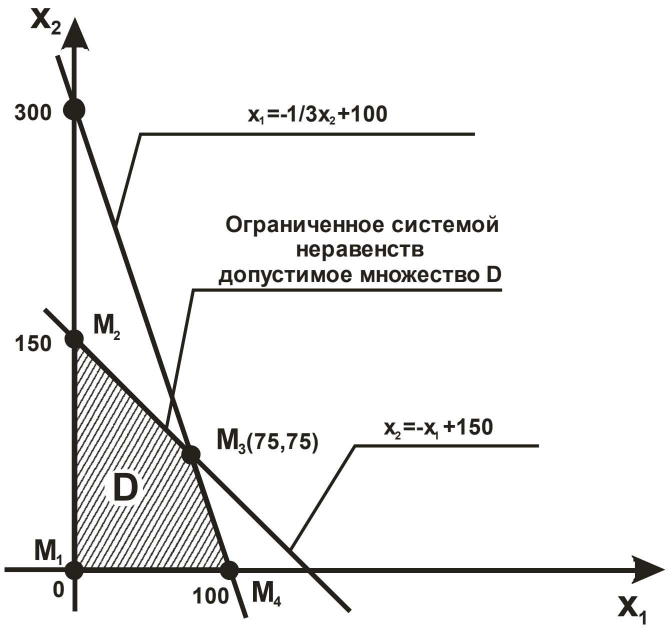


Рис. В.1. Допустимое множество D

В дальнейшем будет доказана следующая теорема.

Теорема. Если допустимое множество D задачи линейного программирования непустое и имеет хотя бы одну вершину, то оптимум целевой функции (если он для данной задачи существует) достигается хотя бы в одной из вершин допустимого множества.

Как следует из рисунка, в рассматриваемой задаче четыре вершины M_1, M_2, M_3, M_4 – множества D имеем следующие координаты:

M_1: (x_1=0; x_2=0);

M_2: (x_1=0; x_2=150);

M_3: (x_1=75; x_2=75);

M_4: (x_1=100; x_2=0).

Согласно теореме максимум целевой функции $S(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ достигается на одной из этих вершин. Подставим эти вершины и вычислим значение целевой функции:

$S(x_1=0; x_2=0) = 2*\cdot 0 + 0 = 0;$

$S(x_1=0; x_2=150) = 2*\cdot 0 + 150 = 150;$

$S(x_1=75; x_2=75) = 2\cdot * 75 + 75 = 225;$

$S(x_1=100; x_2=0) = 2\cdot *100 + 0 = 200.$

Таким образом, максимум целевой функции достигается в вершине M_3, т.е. максимальная прибыль 225 единиц реализуется при плане (x_1=75; x_2=75) выпуска изделий первого и второго типов за сутки.

В общем случае, исходя из смыслового содержания теоремы, естественно возникает путь решения задачи линейного программирования, допустимое множество которой имеет вершины. Найти каким-нибудь способом все вершины допустимого множества (далее будет показано, что их может быть лишь конечное число) и сравнить между собой значения целевой функции во всех вершинах. Если удастся установить, что оптимальное решение данной задачи существует, то вершины, в которых целевая функция достигает наибольшего значения, и будут соответствовать оптимальным решениям задачи. Но такой путь решения задачи линейного программирования, даже с относительно небольшим числом ограничений и неизвестных, практически неосуществим, так как процесс отыскания вершин весьма трудоемкий, а число вершин многогранника может оказаться астрономически большим.

В этих условиях необходимо найти путь более рационального использования идеи о переборе вершин. Именно, если будет известна какая-нибудь вершина и значение целевой функции в ней, то все те вершины, в которых целевая функция принимает худшее значение (т. е. меньшее в случае задачи на максимум и большее в случае задачи на минимум) нам заведомо не нужны. Поэтому естественно стремиться найти способ перехода от данной вершины к лучшей, от нее – к еще лучшей, и т.д. Разумеется, такой способ должен быть дополнен каким-то признаком того, что лучших, чем найденная, вершина вообще нет, а также признаком того, что данная задача вообще не имеет оптимального решения.

В этом и заключается суть наиболее широко применяемого в настоящее время симплекс-метода, или метода последовательного улучшения плана для решения задач линейного программирования. В общем случае, идея алгоритма решения задачи линейного программирования реализуется так. Пусть рассматриваемая задача заведомо имеет непустое допустимое множество с вершинами.

Тогда:

1) тем или иным способом (такие способы существуют) находят какую-нибудь одну вершину допустимого множества и по определенному правилу проверяют, не является ли она оптимальной.

Если она оптимальна – задача решена. Если нет, то

2) по определенному правилу проверяют, нельзя ли утверждать, что задача не имеет оптимального решения (целевая функция не ограничена сверху или, соответственно, снизу на допустимом множестве).

Если утверждать это можно, то задача неразрешима. Если нельзя, то

3) по определенному правилу отыскивают новую, лучшую вершину и возвращаются к 1), принимая в качестве рассматриваемой эту новую вершину.

Гарантируется, что описанный процесс через конечное число переходов к новой вершине (итераций) закончится либо на 1), либо на 2).

Можно доказать, что в случае n=3 в соответствии с правилами, упомянутыми выше, осуществляется каждый раз переход к вершине, соседней с предыдущей (т.е. лежащей с ней на одном ребре). Это остается справедливым и в общем случае (определение ребра многогранника при произвольном n согласуется при этом с понятием ребра в обычном трехмерном пространстве, т.е. при n=3).

Условная геометрическая иллюстрация симплекс-метода приведена на рис. В.2. Здесь M_0 — исходная вершина; M_1 M_2, M_3, M_4 – последовательно получаемые промежуточные вершины; M – оптимальная вершина, достигнутая на пятой итерации.

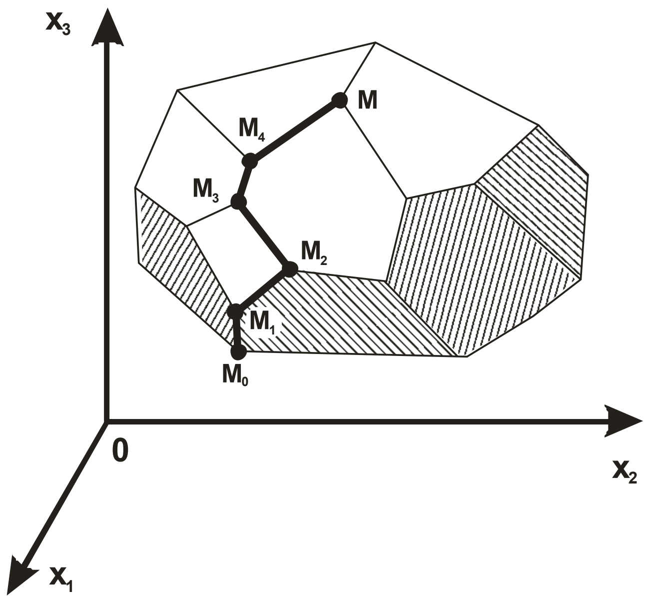


Рис. В.2. Геометрическая иллюстрация симплекс-метода

Таким образом, объектами планирования могут быть самые различные системы: организация деятельности предприятия (нахождение наилучшего плана) с целью получения наибольшей прибыли при ограниченных ресурсах; наилучшая организация работы отрасли, государства, нахождение наилучшего (оптимального) плана распределения ресурсов и т.д.

В целом, задача, возникающая после формализации проблемы оптимального планирования, выглядит следующим образом:

– имеются некоторые плановые показатели: $x_1, x_2,..., x_n$, значения которых неизвестны;

– имеются определенные ресурсы: $r_1, r_2,..., r_m$, за счет которых эти плановые показатели могут быть достигнуты. Разумеется, на практике эти ресурсы ограничены и значения их известны;

– имеется определенная цель, которая формализуется как функция от многих переменных $f(x_1, x_2,..., x_n)$, т.е. зависящая от значений плановых показателей $x_1, x_2,..., x_n$.

В итоге задача становится оптимизационной: определить значения плановых показателей $x_1, x_2,..., x_n$ с учетом ограниченности ресурсов $r_1, r_2,..., r_m$ при условии достижения цели, т.е. $max(f(x_1, x_2,..., x_n))$ или $min(f(x_1, x_2,..., x_n))$.

Решение этой задачи, т.е. найденные значения $x_1 \;\; x_1^*, \; x_2 \;\; x_2^*, \ldots, x_n \;\; x_n^*$ при которых достигается цель, и выполняются ограничения, будет называться оптимальным планом.

Подавляющее большинство оптимизационных задач, встречающихся в практике научных исследований и в производственной деятельности, являются задачами условной оптимизации, то есть предполагают существование некоторых ограничений на область изменения переменных, которые входят в состав соответствующей математической модели. Действительно, трудно представить технологов, экономистов, организаторов производства не озабоченных вопросами нехватки сырья, денежных средств, трудовых ресурсов и необходимостью их рационального использования. Поэтому, при построении математической модели операции, сформулированные критерии эффективности, например, максимизация прибыли или выхода основного продукта, минимизация срока исполнения работы и т.п. должны быть дополнены ограничениями, учитывающими материальные возможности, которыми располагает оперирующая сторона. Заметим также, что руководствуясь требованием простоты, в состав модели стараются ввести, по возможности, меньшее число переменных. Разумеется, не нанося при этом ущерба её адекватности (практической значимости). Конечномерные задачи условной оптимизации с единственной целевой функцией называются задачами **математического программирования.**

Таким образом, в самом общем виде задача математического программирования может быть сформулирована как требование max(min) f(x), где x = (x_1, x_2, ….. x_n), при ограничении x ϵ X. Именно таким задачам: особенностям их постановки, свойствам, способам решения посвящены разделы настоящей работы.

Раздел 1. Линейное программирование

Если целевая функция задачи математического программирования линейна относительно входящих в её состав переменных, а множество X сформировано совокупностью линейных уравнений и неравенств, то такая задача называется **задачей линейного программирования (ЗЛП)**.

Основы линейного программирования были заложены советским математиком Л.В. Канторовичем в 1939 году, когда им была впервые сформулирована и решена ЗЛП применительно к выбору оптимальной производственной программы. Впоследствии выдающиеся заслуги этого ученого в развитии теории и методов решения ЗЛП были отмечены Нобелевской премией в области экономики. В настоящее время линейное программирование является наиболее развитым и широко используемым на практике разделом математического программирования. Несмотря на то, что предположение о линейности математических моделей в ряде случаев ограничивает их содержательность, однако, обладая простотой и наглядностью, они успешно применяются в самых различных видах деятельности.

1.1. Инструкция к организации учебной работы (раздел 1)

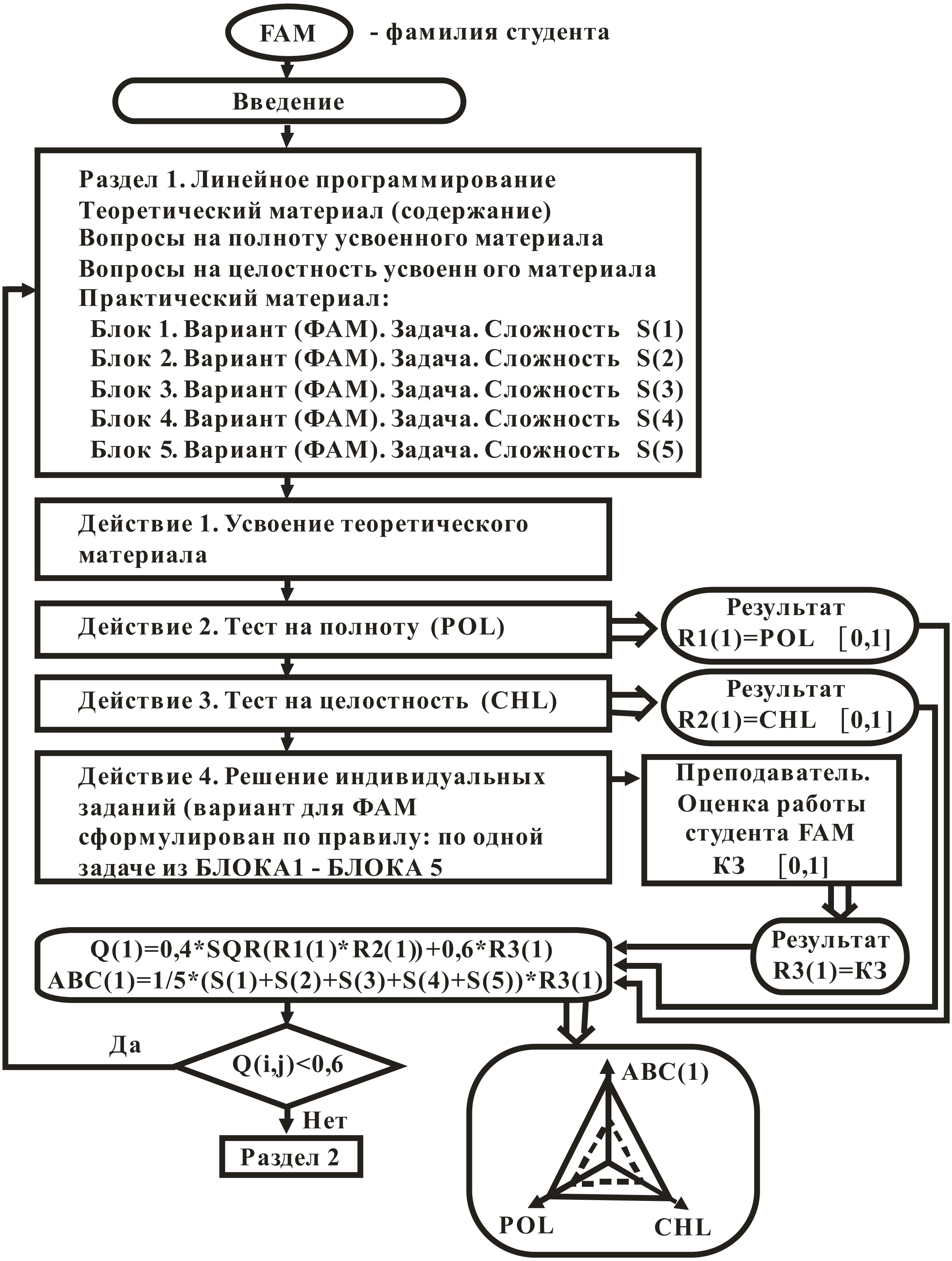


Рис. 1.1. Схема организации подготовки

1.2. Постановка ЗЛП

Рассмотрим постановку ЗЛП на примере задачи планирования производства, т.е. в том самом виде, как она была впервые сформулирована Л.В. Канторовичем.

Пусть имеются m видов ресурсов, $R_1, R_2, ... R_m$, которые используются для производства n видов товаров $T_1, T_2, ... T_n$. Известно, что для производства единицы товара $T_j\left(j = 1, n\right)$ необходимо затратить ресурс $R_i(i = 1, m)$ в количестве a_{ij}. Матрица $A = \left(a_{ij}\right)_{min}$ называется технологической матрицей. Обозначим C_j цену товара T_j формирующуюся в результате действия рыночных механизмов. Вектор $C = \left(C_1, C_2, ... C_n\right)$ называется вектором цен. Обозначим b_i запас ресурса, R_i, который может быть использован в производстве. Вектор $b = \left(b_1, b_2, ... b_m\right)$ называется вектором ресурсов. Обозначим x_j количество товара, T_j, планируемое к производству, и поставим задачу формирования плана производства, при котором достигалась бы наибольшая общая стоимость производимых товаров в рамках существующих ограничений на ресурсы. В математической формулировке это означает, очевидно, отыскание функции $Z(x) = max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, при ограничениях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i(i = 1, m); x \ge 0\left(j = 1, n\right)$, или в матричной форме записи $Z(x) = max < c, x >$, при ограничениях, $Ax \le b,\ x \ge 0$ где символ $< >$ имеет смысл скалярного произведения.

Сформулированная задача является ЗЛП, так как ее решение состоит в отыскании максимума функции многих переменных в условиях ограничений, и все переменные $x_j\left(j = 1, n\right)$ входят линейно как в состав целевой функции, так и в состав системы ограничений.

Замечание. Нетрудно привести примеры, где ЗЛП формулируется как задача отыскания минимума некоторой линейной функции, а также задачи, где ограничения заданы в форме равенств.

В зависимости от структуры ограничений различают стандартную, каноническую и общую формы ЗЛП.

Остановимся на терминологии, принятой в линейном программировании. Любой вектор x, представляющий набор переменных задачи называется планом ЗЛП; план ЗЛП, удовлетворяющий всем ограничениям ЗЛП называется допустимым планом ЗЛП; допустимый план ЗЛП, на котором целевая функция достигает своего максимума (минимума) называется оптимальным планом ЗЛП, или решением ЗЛП.

Стандартная	**Каноническая**	**Общая**
$max\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$max\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$max\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i=\overline{1,m}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\ i=\overline{1,m}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i=\overline{1,k}$
$x_j \ge 0$	$x_j \ge 0$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i=\overline{k+1,m}$
		$x_j \ge 0$

В ряде случаев требование неотрицательности переменных может отсутствовать в системе ограничений ЗЛП. Такие ситуации при постановке задачи обычно особо оговариваются. Все формы ЗЛП эквивалентны и могут быть получены одна из другой путем простейших преобразований.

Рассмотрим порядок построения математической модели ЗЛП на простом числовом примере.

Пример 1. Магазин оптовой торговли реализует три вида продукции *A, B, C,* используя в своей деятельности три ограниченных ресурса: площадь торговых залов, размеры которой составляют 120 кв.м, площадь складских помещений, составляющую 8000 кв. м, и рабочее время сотрудников, лимит которого составляет 1100 чел./час. Для обработки и реализации единицы товара *A* необходимо: рабочего времени 0,1 чел./час., площади торговых залов 0,05 кв. м, площади складских помещений 3 кв. м. Соответствующие показатели для товара $B - 0{,}2$ чел./час; 0,02 кв. м; 1 кв. м; а для товара C - 0,4 чел./час.; 0,02 кв. м; 2 кв. м. Доход, получаемый магазином от реализации единицы каждого вида товара, составляет: по товару A - 3 тыс. руб., по товару B - 5 тыс. руб., по товару C - 4 тыс. руб. Необходимо сформировать план товарооборота, обеспечивающий максимальный доход магазина.

Очевидно, что в данных условиях технологическая матрица задачи будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}05 & 0{,}02 & 0{,}02 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Обозначая x_1 – план товарооборота по товару A, x_2 – план товарооборота по товару B, x_3 – план товарооборота по товару C и, учитывая требование максимизации дохода, получим целевую функцию задачи: $Z = \max\ (3x_1 + 5x_2 + 4x_3)$. Умножая вектор планов товарооборота x на технологическую матрицу A, и, принимая во внимание размеры торговых и складских площадей магазина и лимит рабочего времени персонала, сформулируем систему ограничений задачи, предполагая линейность расхода ресурсов по отношению к товарообороту:

$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \leq 1100$$
$$0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}02x_3 \leq 120$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8000$$

Завершает постановку задачи естественное требование неотрицательности товарооборотов: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$. ЗЛП в стандартной форме сформулирована полностью.

Переход от ЗЛП в стандартной форме к эквивалентной ЗЛП в канонической форме достигается путем введения дополнительных неотрицательных переменных по одной в каждое неравенство: $x_4 \geq 0$; $x_5 \geq 0$; $x_6 \geq 0$, которые называются фиктивными. Тогда система ограничений задачи примет вид

$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 + x_4 \leq 1100$$
$$0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}02x_3 + x_5 \leq 120$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 \leq 8000$$

Чтобы это не привело к изменению целевой функции задачи, эти переменные вводятся в её состав с нулевыми коэффициентами: $Z = \max\,(3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6)$.

1.3. Геометрическая интерпретация ЗЛП

Очевидно, что геометрически целевая функция представляет собой прямую линию в пространстве, размерность которого равна числу независимых переменных в составе целевой функции. Множество допустимых планов ЗЛП есть некоторая область, высекаемая в пространстве ограничениями, которые также являются прямыми линиями. В зависимости от конкретного вида уравнений и неравенств, входящих в состав системы ограничений ЗЛП, множество планов может принимать три основных вида:

1. Замкнутое ограниченное множество.
2. Неограниченное множество.
3. Пустое множество (требования, задаваемые системой ограничений, противоречивы).

В пространстве двух переменных любое из трех типов множеств может быть представлено графически (рис.1.1- рис.1.3).

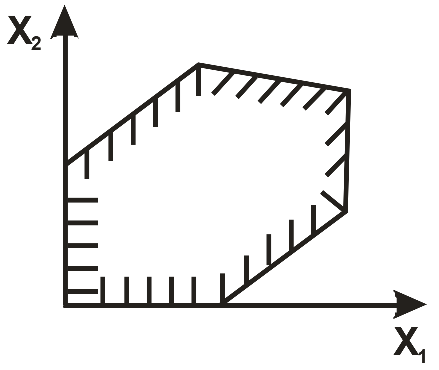


Рис. 1.1. Замкнутое ограниченное множество

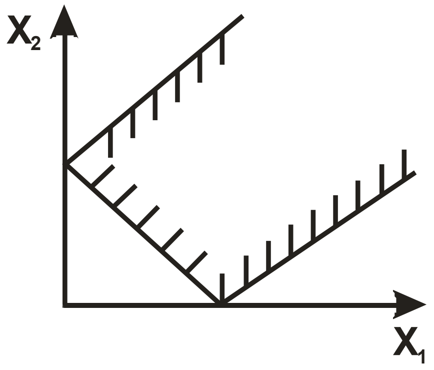


Рис. 1.2. Неограниченное множество

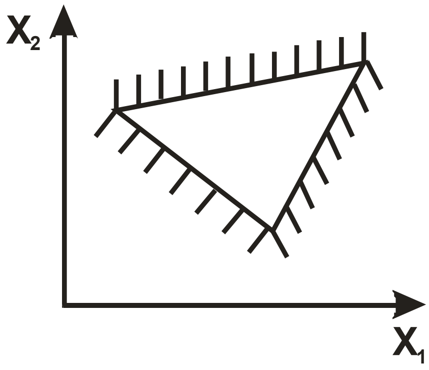


Рис. 1.3.Пустое множество

Штриховкой на рисунках обозначены области действия ограничений. Ясно, что о решении ЗЛП имеет смысл говорить только в том случае, когда область допустимых планов является множеством первого вида. Во втором случае линейная форма целевой функции неограничена, как и само множество допустимых планов, а в третьем просто нереализуема. Рассмотрим для определенности задачу отыскания максимума линейной формы в пространстве двух переменных (см. рис. 1.4).

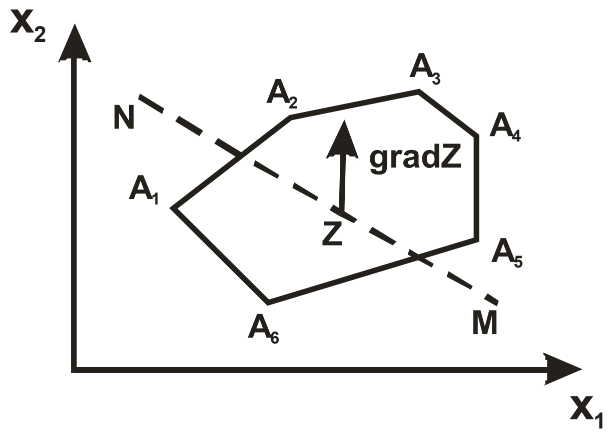


Рис. 1.4. Графическая интерпретация поиска решения

Пусть область допустимых планов представляет многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Выберем произвольное значение целевой функции $Z = Z_0$, т.е. $c_1x_1 + c_2x_2 = z_0$. Это уравнение прямой линии, отрезок которой MN принадлежит множеству допустимых планов. Практически решение ЗЛП сводится к тому, чтобы определить, в какой точке многоугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ целевая функция Z достигает максимального значения. Из курса математического анализа известно, что наискорейший рост любой функции, в том числе и линейной, наблюдается в направлении вектора ее градиента, т.е. вектора, компоненты которого являются частными производными функции по всем ее переменным. В рассматриваемом случае

$$gradZ = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = (C_1, C_2).$$

Для линейной функции вектор градиента всегда направлен под прямым углом к ней. Таким образом, решение ЗЛП на отыскание максимума сводится к перемещению целевой функции в направлении градиента до тех пор, пока хотя бы одна ее точка принадлежит множеству допустимых планов. Именно эта точка и будет оптимальным допустимым планом ЗЛП. В нашем примере это будет вершина A_3 многоугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Замечание. Решение ЗЛП на отыскание минимума осуществляется в том же порядке, только перемещение целевой функции производится в направлении ее наискорейшего убывания, т.е. противоположном направлению вектора градиента. В рассматриваемом примере точкой минимума целевой функции будет точка A_6.

1.4. Основные свойства ЗЛП

Для более глубокого понимания процедуры решения ЗЛП и получаемых при этом результатов целесообразно предварительно познакомиться с общими свойствами ЗЛП и сформулировать некоторые теоретические положения.

Определение: Множество X называется выпуклым, если для любых точек $x^1 \in X$ и $x^2 \in X$ точка $x^0 = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$ также будет принадлежать X для любого $0 \le \alpha \le 1$. Геометрически это означает, что выпуклое множество полностью содержит в себе отрезок прямой, соединяющий две любые точки этого множества.

Лемма. Множество допустимых планов ЗЛП выпукло. Рассмотрим матричную запись ЗЛП в стандартной форме max $<c,x>$; $Ax \le b;\ x \ge 0$. Пусть x^1 и x^2 произвольные допустимые планы этой ЗЛП. Покажем, что их линейная комбинация, т.е. вектор $x^0 = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$ также является допустимым планом той же ЗЛП. Так как по условию x^1 и x^2 неотрицательны, то $x^0 \ge 0$ как сумма неотрицательных слагаемых. Умножим вектор x^0 и его представление на матрицу A

слева. $Ax^0 = \alpha Ax^1 + (1 - \alpha)Ax^2$. Поскольку x^1 и x^2 допустимые планы ЗЛП, справедлива оценка $Ax^0 \leq \alpha b + (1 - \alpha)b = b$**.** Таким образом, вектор x^0 удовлетворяет всем ограничениям ЗЛП и, следовательно, является её допустимым планом.

Определение: Точка $x^* \in X$, где X – выпуклое множество, называется крайней (или угловой) точкой множества X, если не существует двух различных точек $x^1 \in X$ и $x^2 \in X$ таких, что $x^* = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$. Крайние точки множества допустимых планов ЗЛП называются опорными планами ЗЛП. Геометрически крайние точки множества допустимых планов ЗЛП представляют вершины многогранника, образованного линейными ограничениями ЗЛП.

Из материалов предыдущего раздела и, в частности, рис. 1.4 ясно, что решение ЗЛП, если таковое существует, совпадает с какой-либо из вершин многогранника допустимых планов. Проведём строгое обоснование этого положения для общего случая ЗЛП произвольной размерности.

Основная теорема линейного программирования. Если ЗЛП имеет решение, то оно совпадает, по крайней мере, с одной крайней точкой множества допустимых планов.

Рассмотрим целевую функцию ЗЛП $Z(x) = max <c,x>$, множество допустимых планов которой есть выпуклый многогранник с вершинами $x^1, x^2, \ldots.. x^k$. Обозначим x^* допустимый план, являющийся решением ЗЛП, т.е. $<c,x^*> \geq <c,x>$, где x – произвольный допустимый план. Если x^* совпадает с каким-либо опорным планом ЗЛП, то условие теоремы выполнено. Предположим противное т.е., что x^* не является крайней точкой. Но тогда она будет внутренней точкой многогранника допустимых планов и может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации крайних точек, иначе говоря, $x^*=\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots + \alpha_k x^k$; $\sum\alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0; (i = 1, k)$. В силу линейности целевой функции $<c, x^*> = \alpha_1 <c, x^1> + \alpha_2<c, x^2> + \ldots\ldots + \alpha_k<c, x^k>$. Обозначим $M = max <c, x^i>$. Тогда имеет место оценка: $<c,x^*> \leq \alpha_1 M + \alpha_2 M + \ldots.. + \alpha_k M$. Учитывая условие нормировки, получим $<c,x^*> \leq M$. Но по условию теоремы $<c, x^*> \geq <c, x>$, а значит $<c,x^*> \geq M$, следовательно, $<c, x^*> = M$. Но M наибольшее значение целевой функции в крайних точках.

Замечание: Если решение ЗЛП совпадает с двумя и более крайними точками многогранника допустимых планов, то любая выпуклая линейная комбинация этих точек также будет решением ЗЛП.

Полученный результат важен, прежде всего, тем, что позволяет существенно сузить область поиска решения ЗЛП, ограничив её только множеством опорных планов ЗЛП, число которых конечно, и не трудно показать, что оно не может превосходить C_n^r, где n – число переменных, входящих в состав целевой функции ЗЛП; r – ранг технологической матрицы ЗЛП. Следует, также, обратить внимание, что опорные планы ЗЛП образованы пересечением двух или более линейных ограничений, выполняющихся в этих точках как строгие равенства. Следовательно, непосредственно перед решением ЗЛП должна быть приведена к канонической форме. Однако, если размерность задачи велика и наглядное представление множества допустимых планов невозможно, нельзя визуализировать крайние точки этого множества. Поэтому алгоритм решения ЗЛП не может быть построен, пока не сформулирован алгебраический признак опорного плана. Прежде чем приступить к этой проблеме, целесообразно освежить в памяти некоторые положения линейной алгебры.

Запишем ЗЛП в канонической форме $max < c, x > Ax = b; x \geq 0$. Так как A – матрица, а $x = (x_1, x_2, ... x_n)$ n мерный вектор, то систему ограничений ЗЛП можно записать в виде $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = b,$ где $A_j(j = 1,n)$ столбцы матрицы A. Из курса линейной алгебры известно, что число линейно независимых уравнений системы ограничений, т.е. ее ранг r не может быть больше числа переменных n. Если $n = r$, то ЗЛП имеет решение, совпадающее с решением системы уравнений, из которых сформированы ограничения. Если же $r < n$, то система векторов $\{A_1, A_2, ... A_n\}$ содержит базисную систему векторов размерности r $\{A_1, A_2, ... A_r\}$, которые являются линейно-независимыми, а любой другой вектор $A_j \left(j = r+1, n\right)$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов. Переменные, соответствующие базисным векторам, называются базисными. Остальные n-r переменных называются свободными и могут принимать любые значения, в том числе и нулевые.

Теорема. Число ненулевых компонент крайних точек множества допустимых планов ЗЛП равно числу линейно-независимых столбцов системы ограничений. Т.е. если в системе ограничений ЗЛП содержится m из n линейно независимых столбцов $A_1, A_2, ... A_m$,то любая крайняя точка множества допустимых планов имеет вид $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ... x_m^0 0,0, ... 0\right)$. Т.к. точка x^0 принадлежит множеству допустимых планов ЗЛП, то по определению $A_1 x_1^0 + A_2 x_2^0 + ... + A_n x_n^0 = b,$ или, учитывая вид точки $x^0, A_1 x_1^0 + A_2 x_2^0 + ... + A_m x_m^0 = b$. Предположим, что точка x^0 не является крайней точкой. Тогда, в силу выпуклости множества допустимых планов ЗЛП, ее можно представить в виде: $x^0 = \alpha x^1 + (1 \quad \alpha) x^2$ или в компонентной форме:

$$\left(x_1^0, x_2^0, ... x_m^0, 0, 0 ... 0\right) = \alpha \left(x_1^1, x_2^1, ... x_m^1, x_{m+1}^1, ... x_n^1\right) +$$
$$+ \left(1 - \alpha\right)\left(x_1^2, x_2^2, ... x_m^2, x_{m+1}^2, ... x_n^2\right)$$

Следовательно, для любой координаты $x_j^0 = \alpha x_j^1 + \left(1 - \alpha\right) x_j^2 \left(j = 1, m\right)$ и $x_j^0 = \alpha x_j^1 + \left(1 - \alpha\right) x_j^2, \left(j = m+1, n\right)$. Отсюда следует, что $x_j^1 = 0$ и $x_j^2 = 0$ для любого $\left(j = m+1, n\right)$. Иначе говоря, точки x^1 и x^2 имеют ту же структуру, что и точка x^0. А так как эти точки также принадлежат множеству допустимых планов, то по определению

$$A_1x_1^1 + A_2x_2^1 + \ldots A_mx_m^1 = b \text{ и } A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + \ldots A_mx_m^2 = b.$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$A_1\left(x_1^1 \quad x_1^2\right) + A_2\left(x_2^1 \quad x_2^2\right) + \ldots A_m\left(x_m^1 \quad x_m^2\right) = 0.$$

Но ввиду того, что по условию теоремы столбцы $A_1, A_2, \ldots A_m$ линейно независимы, то это возможно только в случае $x_j^1 = x_j^2, \ \left(j = 1, m\right)$. Значит $x^1 = x^2$. Следовательно, точку x^0 невозможно представить в виде линейной комбинации двух различных точек множества допустимых планов ЗЛП, а значит, точка x^0– крайняя точка или опорный план ЗЛП.

Таким образом, для отыскания решения ЗЛП произвольной размерности достаточно найти значения целевой функции во всех крайних точках множества допустимых планов и выбрать из них максимальное (минимальное), которое и будет являться решением ЗЛП. Для алгебраической формализации этой процедуры и облегчения вычислений необходимо решить несколько промежуточных задач:

1. Отыскать значение целевой функции в некоторой произвольной крайней точки, т.е. найти начальный опорный план.
2. Указать способ перехода от одного опорного плана к другому.
3. Задать признак оптимальности опорного плана.
4. Указать условие отсутствия решения ЗЛП (неограниченности целевой функции на множестве допустимых планов).

Последовательное решение комплекса указанных задач определяет основное содержание так называемого симплекс-метода, или метода последовательного улучшения опорного плана, который является универсальным методом решения любых ЗЛП. Это означает, что для любой ЗЛП независимо от её размерности и особенностей постановки симплекс-метод позволяет: либо за конечное число переходов от одного опорного плана к другому найти точное решение ЗЛП, либо доказать его отсутствие.

1.5. Алгебраические основы симплекс-метода

Рассмотрим ЗЛП, в которой требуется найти максимум целевой функции $Z(x)=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$. Пусть система ограничений имеет в своем составе m линейно-независимых (базисных столбцов) $A_1^s, A_2^s, \dots A_m^s . (m<n)$. Тогда, как было замечено выше, любой другой из столбцов может быть представлен в виде линейной комбинации базисных столбцов, т.е. в виде $A_j=\sum\limits_{i=1}^{m} A_i^s y_{ij}^s \quad \left(j=\overline{m+1,n}\right)$, где y_{ij}^s– коэффициенты разложения. Выберем в целевой функции коэффициенты, соответствующие базисным переменным $C_1^s, C_2^s, \dots C_m^s$, и умножим их на коэффициенты разложения j-го столбца $y_{1j}^s, y_{2j}^s, \dots y_{mj}^s$.

Обозначим $d_j=\sum\limits_{i=1}^{m} c_i^s y_{ij}^s$ и $\Delta_j=d_j-c_j, \left(j=\overline{m+1,n}\right)$. С учетом введенных обозначений и ранее полученных сведений можно сформулировать критерий оптимальности опорного плана.

Теорема о критерии оптимальности опорного плана. Если для некоторого опорного плана x^*, содержащего m базисных компонент $\Delta_j \geq 0$ для любой небазисной переменной, то опорный план x^* оптимален и является решением ЗЛП.

Возьмем произвольный допустимый план x. По определению $Ax=b$. Рассмотрим опорный план x^*, удовлетворяющий условиям теоремы. Выразим через базисные столбцы, соответствующие ненулевым компонентам опорного плана, все остальные столбцы системы ограничений ЗЛП и запишем систему ограничений в канонической форме $\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{m}A_i^s y_{ij}^s\right)x_j = b.$ Ввиду того, что обе суммы содержат конечное число слагаемых, от изменения порядка суммирования результат не изменится, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{m}A_i^s\left(\sum\limits_{j=1}^{n}y_{ij}^s x_j\right) = b.$

Для опорного плана x^* система ограничений, с учетом n-m нулевых компонент в его составе, примет вид $\sum\limits_{i=1}^{m}A_i^s x_i^{*s} = b.$ Отсюда следует выражение компонент опорного плана через компоненты произвольного допустимого плана $x_i^{*s} = \sum\limits_{j=1}^{n}y_{ij}^s x_j.$ Произведем оценку линейной формы целевой функции. По условию теоремы $\sum\limits_{j=1}^{n}c_j x_j \le \sum\limits_{j=1}^{n}d_j x_j = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}c_i^s y_{ij}^s x_j.$

Меняя порядок суммирования и используя выражение компонент опорного плана через произвольный, получим: $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}c_i^s y_{ij}^s x_j = \sum\limits_{i=1}^{m}c_i^s\sum\limits_{j=1}^{n}y_{ij}^s x_j = \sum\limits_{i=1}^{m}c_i^s x_i^{*s},$ т.е. $\sum\limits_{j=1}^{n}c_j x_j \le \sum\limits_{i=1}^{m}c_i^s x_i^{*s}$ для любого x. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{m}c_i^s x_i^{*s} = max\sum\limits_{j=1}^{n}c_j x_j,$ что означает, что план X^* есть решение ЗЛП.

Замечание. При решении ЗЛП на отыскание минимума целевой функции критерием оптимальности опорного плана является условие $\Delta_j \le 0$ для любой небазисной переменной.

Рассмотрим алгоритм перехода от одного опорного плана к другому. Пусть начальный план ЗЛП имеет вид, $x = (x_1, x_2, \dots x_m, 0 \dots 0)$, т.е. первые его m компонент ненулевые, а остальные $n-m$ нули. Т.к. структура опорных планов одинакова, то задача перехода от одного опорного плана к другому сводится к отысканию нового вектора x'

размерности n с тем же количеством ненулевых элементов, который бы удовлетворял системе ограничений ЗЛП и обеспечивал рост целевой функции. Выберем в исходном опорном плане какую-либо координату $x_j = 0 \quad \left(j = \overline{m+1,n}\right)$. И заменим ее некоторым числом $\theta > 0$. Т.е. в новом опорном плане $x'_j = \theta$. Остальные компоненты от $m+1$ до n оставляем нулевыми. Выразим координаты нового опорного плана через координаты исходного. Запишем ограничения ЗЛП через координаты нового опорного плана $\sum\limits_{j=1}^{n} A_j x'_j = b,$ или, учитывая наличие ненулевых компонентов $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i^s x_i'^s + \theta A_j = b$. Представляем A_j через систему базисных столбцов $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i^s x_i'^s + \theta \sum\limits_{i=1}^{m} A_i^s y_{ij}^s = b$. Выполняем аналогичные операции для компонент исходного опорного плана $\sum\limits_{j=1}^{n} A_j x_j = \sum\limits_{i=1}^{m} A_i^s x_i^s = b$. Отсюда следует, что координаты нового и исходного опорных планов связаны соотношением $x_i'^s + \theta y_{ij}^s = x_i^s$. Так как общее количество ненулевых компонент нового опорного плана должно быть равным m, величину θ определяем из условия $x_i'^s = 0$.

Отсюда $\theta = x'_j = \dfrac{x_i^s}{y_{ij}^s}$. Произведем оценку значения целевой функции в точке нового опорного плана, используя полученное соотношение, связывающее координаты нового и исходного опорного плана:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x'_j = \sum_{i=1}^{m} c_i^s x_i'^s + c_j \theta = \sum_{i=1}^{m} c_i^s x_i^s - \theta\left(\sum_{i=1}^{m} c_i^s y_{ij}^s - c_j\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i^s x_i^s - \Delta_j \theta =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \Delta_j \theta$$

Таким образом, значения целевой функции в новом опорном плане отличаются от исходного на величину $\Delta_j\theta$. Так как по построению $\theta > 0$, то рост целевой функции возможен только при условии $\Delta_j < 0$. В противном случае роста целевой функции не будет, как и было показано в теореме о критерии оптимальности опорного плана. Если в разложении по базисным столбцам все коэффициенты разложения, $y_{ij}^s \le 0$, то целевая функция на множестве допустимых планов не ограничена (см. рис. 1.2). Действительно, в этом случае условие допустимости плана $x_i'^s = x_i^s \quad \theta y_{ij}^s \ge 0$ будет выполняться всегда по любой переменной, а значение целевой функции будет неограниченно возрастать с ростом θ. Поэтому практически важным является случай, когда существуют $\Delta_j < 0$ и i, для которых $y_{ij}^s > 0$. Тогда рекомендуется выбирать θ из условия $\theta = min\left\{\dfrac{x_i{}^s}{y^s{}_{ij}}\right\}$, $(i = 1,m)$.

Пример 2. Решить ЗЛП:

$$max\, Z = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_j \ge 0, j = 1,4. \end{cases}$$

В состав задачи входят четыре переменные, а систему ограничений формируют два уравнения, которые линейно независимы. Следовательно, базис системы ограничений составляют два столбца, а любой опорный план ЗЛП содержит две ненулевые компоненты. Возьмем в качестве начальных базисных переменных x_3 и x_4. Тогда начальный опорный план будет иметь вид $x^0 = (0,0,1,3)$; он удовлетворяет системе ограничений, и, как нетрудно убедиться, целевая функция принимает в нем значение

$Z^0 = -2$, $\max c_j = c_1 = 2$, поэтому, т.к. решается задача максимизации, целесообразно ввести в состав базиса компоненту x_1. Находим разложение столбца A_1 через базисные $A_1 = A_3 y_{31} + A_4 y_{41}$, т.е.:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y_{31} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_{41}$, отсюда $y_{31} = 1, y_{41} = 2$. Далее находим

$\Delta_1 = d_1 - c_1$, где $d_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i^s y_{i1}^s = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -1$, $\Delta_1 = -1 - 2 = -3 < 0.$

Отсюда по теореме о критерии оптимальности опорного плана следует, что план x^0 неоптимален. Какую именно координату следует вывести из опорного плана, определяем из условия $\theta = \min \frac{x_i^s}{y_{ij}^s} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{3}{2} \right\}$, поэтому выводим из опорного плана

координату x_3. По формуле $x_j^1 = x_j^0 - y_{ij}^s \theta$ находим все координаты нового опорного плана x^1. После простых вычислений получаем $x^1 = (1{,}0{,}0{,}1)$. Легко проверить, что новый план удовлетворяет системе ограничений и обеспечивает рост целевой функции $Z^1 = 1$. Продолжим улучшение опорного плана, введя в базис координату x_2. Выразим столбец A_2 через базисные $A_2 = A_1 y_{12} + A_4 y_{42}$, т.е.

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} y_{12} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_{42}$, отсюда $y_{12} - 1; y_{42} = 3$. Находим

$d_2 = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i^s y_{i2}^s = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -5$. $\Delta_2 = d_2 - c_2 = -5 - 1 = -6 < 0.$

Следовательно, опорный план x^1 неоптимален. Вычисляем $\theta = \min \frac{x_i^s}{y_{ij}^s} = \left\{ -\frac{1}{1}, \frac{1}{3} \right\}$. Так как $\theta > 0$ полагаем $\theta = 1/3$ и выводим из

числа базисных компоненту x_4. По формуле $x_j^2 = x_j^1 - y_{ij}^s \theta$ находим координаты нового опорного плана $x^2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$. Он удовлетворяет системе ограничений и улучшает значение целевой функции $Z^2 = 3$. Введем в базис координату x_3. Выразим столбец A_3 через базисные $A_3 = A_1 y_{13} + A_2 y_{23}$, т.е. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} y_{13} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} y_{23}$, отсюда: $y_{13} = \frac{1}{3}$, $y_{23} = -\frac{2}{3}$.

Находим

$$d_3 = \sum_{i=1}^{m} c_i^s y_{13} = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 0; \Delta_3 = d_3 - c_3 = 0 - 1 = -1 < 0.$$

Следовательно, опорный план X^2 неоптимален. Вычислим $\theta = min \frac{x_i^s}{y_{ij}^s} = \left\{ \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}, \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} \right\}$, т.к. $\theta > 0$ полагаем $\theta = 4$. По формуле $x_j^3 = x_j^2 - y_{ij}^s \theta$ находим координаты нового опорного плана x^3 = (0,3,4,0). Он удовлетворяет системе ограничений и улучшает значение целевой функции Z^3 = 7. Выразим A_1 через базисные столбцы $A_1 = A_2 y_{21} + A_3 y_{31}$, т.е. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} y_{21} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y_{31}$, отсюда

$$y_{21} = 2, y_{31} = 3.$$

Находим $d_1 = \sum_{i=1}^{m} c_i^s y_{i1}^s = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 5.$ И далее $\Delta_1 = d_1 - c_1 = 5 - 2 = 3 > 0$. Следовательно, введение в базис координаты x_1 не приведет к улучшению опорного плана. Выразим A_4 через базис $A_4 = A_2 y_{24} + A_3 y_{34}$, т.е.:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} y_{24} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y_{34}$, отсюда $y_{24} = 1, y_{34} = 1$.

Находим $d_4 = \sum_{i=1}^{m} c_i^s y_{i4}^s = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$. Далее $\Delta_4 = d_4 - c_4 = 2\text{-}1(-1) = 3 > 0$. Следовательно, введение в базис координаты x_4 вместо x_2 и x_3 также нецелесообразно. Значит, опорный план x^3 является оптимальным опорным планом и решением ЗЛП будет вектор $x^* = (0, 3, 4, 0)$.

Пример 3. Решить ЗЛП:

$$max\, Z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Возьмем в качестве базисных переменных начального опорного плана координаты x_3 и x_4. Тогда начальный опорный план будет иметь вид $x^0 = (0,0,1,1)$. Нетрудно убедиться, что он удовлетворяет системе ограничений, а целевая функция принимает на нем значение $Z^0 = 0$. Найдем коэффициенты разложения столбца A_2 через базисные

$$A_2 = A_3 y_{32} + A_4 y_{42}. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} y_{32} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} y_{42},$$ отсюда

$y_{32} = -2; y_{42} = -1.$ Находим $d_2 = \sum_{i=1}^{m} c_i^s y_{ij}^s = (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) = 1,$ и далее $\Delta_2 = d_2 - c_2 = 1 - 2 = -1 < 0$. Из этого следует, что опорный план X^0 не оптимален. Однако все коэффициенты y_{ij}^s отрицательны, что означает неограниченность целевой функции на множестве допустимых планов, т.е. $max\, Z = \infty$.

1.6. Симплекс-таблицы

Рассмотренный выше алгоритм решения ЗЛП вполне эффективен, однако не свободен от некоторых недостатков.

1. В ряде случаев, оказывается, затруднительно дать разумную физическую или экономическую интерпретацию полученного решения, а именно это определяет практическую значимость конечного результата.

2. Если размерность ЗЛП велика, то отыскание начального опорного плана становится самостоятельной и отнюдь непростой задачей. Кроме того, проверки критерия оптимальности ЗЛП, имеющей в своем составе n переменных и m линейно-независимых ограничений, предполагают решение систем m линейных уравнений для n – m небазисных переменных. Ниже будет рассмотрена одна из модификаций симплекс-метода, называемая методом искусственного базиса, где перечисленные недостатки преодолены, а вычислительный алгоритм сведен к последовательности простых арифметических операций.

Рассмотрим систему ограничений ЗЛП, содержащую m уравнений и n переменных, $(m < n)$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots. & a_{1m}x_m + \ldots. & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \ldots. & a_{2m}x_m + \ldots. & a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \ldots. & a_{mm}x_m + \ldots. & a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Из курса линейной алгебры известно, что подобные системы посредством линейных преобразований могут быть приведены к виду:

$$\begin{cases} x_1 + & 0 + & \ldots & +\alpha_{1\cdot m+1}x_{m+1} + & \ldots. & +\alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ 0 + & x_2 + & \ldots & +\alpha_{2m+1}x_{m+1} + & \ldots. & +\alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ 0 + & 0 + \ldots & +x_m & +\alpha_{mm+1}x_{m+1} + & \ldots & +\alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases} \quad (*)$$

Приняв в качестве базисных переменные от x_1 до x_m, и, положив переменные с номерами от $m+1$ до n равными нулю, получим вектор ($(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m, 0, \ldots 0)$, удовлетворяющий всем признакам опорного плана ЗЛП. Еще одним практически важным полезным свойством системы ограничений ЗЛП, записанной в виде (*), является то обстоятельство, что отсутствует необходимость решения системы линейных уравнений для отыскания y_{ij}^{s}, поскольку в этом случае $y_{ij}^{s} \equiv \alpha_{ij} \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{m+1,n}\right)$. И, таким образом, формула для расчета новой ненулевой компоненты опорного плана принимает вид: $\theta = min\left\{\frac{x_i^s}{y_{ij}^s}\right\} = min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}\right\}$, а величина d_j в выражении критерия оптимальности $\Delta_j = d_j - c_j$ вычисляется, как $d_j = \sum_{i=1}^{m} C_j^s \alpha_{ij}$. Поскольку в системе (*) совокупность базисных векторов представляет собой единичную подматрицу размерности m, переход к новому опорному плану осуществляется путем замены одного из базисных векторов на свободный. Пересчет элементов нового вектора для введения его в базис и матрицы в целом выполняется с помощью элементарных преобразований аппарата линейной алгебры и соотношений, полученных в разделе 1.5 для реализации этого алгоритма используются так называемые симплекс-таблицы.

Порядок решения ЗЛП с их помощью естественнее всего может быть проиллюстрирован на конкретном примере. В качестве такового решим ЗЛП сформулированную в *Примере 1* раздела 1.2. Приведенная к канонической форме, она имеет следующий вид:

$$f = max\, 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 + x_4 = 1100 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}02x_3 + x_4 = 120 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 8000 \\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Эта задача имеет в своем составе шесть переменных и три линейно независимых ограничения в виде равенств, а значит, в соответствии с теоремой раздела 1.1.4, любой опорный план данной задачи содержит три ненулевые компоненты. Поскольку векторы

x_4, x_5, x_6 образуют единичную подматрицу размерности $m = 3$ в матрице системы ограничений, именно эти переменные целесообразно выбрать в качестве базисных для построения начального опорного плана. При этом, очевидно, начальный опорный план будет представлен вектором $x^0 = (0, 0, 0, 1100, 120, 8000)$, а значение целевой функции на этом опорном плане $f(x^0) = 0$. Полученные результаты заносятся в специальную таблицу, называемую симплекс-таблицей.

Таблица 1а

№ шага	Базисные переменные	функции при базисных	Значения базисных переменных	Элементы матрицы ограничений						θ
		c_j^s	β_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	x_4	0	1100	0,1	0,2	0,4	1	0	0	
	x_5	0	120	0,05	0,02	0,02	0	1	0	5500
	x_6	0	8000	3	1	2	0	0	1	
Инд. стр.	$f(x^0)$	0	$\Delta_j = d_j - c_j$	-3	-5	-4	0	0	0	

Последняя строка симплекс-таблицы носит название <u>индексной строки</u>. В эту строку заносятся значение целевой функции в текущей точке опорного плана и значение критерия оптимальности, вычисленные для всех переменных. Напомним, что в соответствии с теоремой о критерии оптимальности опорного плана для задачи максимизации должно выполняться условие $\Delta_j \geq 0$, а для задачи минимизации $\Delta_j \le 0$ для $\forall j = \overline{1,n}$. Из таблицы 1а видно, что на опорном плане X^0 условия критерия не выполнены, причем минимальное значение достигается для переменной x_2. Следовательно, введение базисной переменной x_2 будет наиболее эффективно в смысле прироста целевой функции. Столбец симплекс-таблицы, соответствующий переменной, вводимой в базис, называется ведущим столбцом. Выполняя деление элементов столбца β_i на соответствующие элементы ведущего столбца, находим минимальное симплексное отношение θ по формуле $\theta = min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}\right\}$. В рассматриваемом случае минимум реализуется на отношении элементов первой строки и составляет $\theta = \frac{1100}{0,2} = 5500$. Эта строка называется ведущей строкой симплекс-таблицы и указывает переменную, которую следует вывести из базиса. В решаемой задаче это переменная x_4. Элемент, стоящий на пересечении ведущего столбца ведущей строки, называется ведущим элементом. В некоторых литературных источниках используется термин разрешающий или ключевой элемент. Переход к новому опорному плану и пересчет элементов симплекс-таблицы может быть сформулирован в виде набора достаточно очевидных легко реализуемых правил.

1. Поскольку система базисных векторов образует в симплекс-таблице единичную подматрицу, столбец, вводимый в базис, принимает вид столбца, выводимого из базиса, а столбцы, соответствующие переменным, которые остаются в составе базисных, изменений не претерпевают.

2. Т.к. в новой симплекс-таблице в позиции ведущего элемента старой симплекс-таблицы появляется единица, все остальные элементы ведущей строки делятся на ведущий элемент.

3. Новые ненулевые компоненты опорного плана элементы столбца β_i вычисляются по формуле, полученной в разделе 2.1. $x_i^н = x_i^c - y_{ij}^s\theta,$ или учитывая вид матрицы ограничений $x_i^н = x_i^c - \theta\alpha_{ij}^0$, где α_{ij}^0- соответствующие элементы ведущего столбца. Индекс H соответствует новой компоненте; индекс C- старой, т.е. в обозначениях таблицы $x_i^н \equiv \beta_i^н; x_i^c \equiv \beta_i^c$.

4. Для более полного использования возможностей табличной формы представления ЗЛП вместо соотношения п. 3 для отыскания компонента нового опорного плана обычно применяется правило прямоугольника, называемое иногда правилом креста. Обозначим номер ведущей строки i_0, номер ведущего столбца j_0. Тогда ведущий элемент $\alpha_{i_0j_0}$ и элементы $\beta_{i_0}, \beta_i, \alpha_{ij_0}$ образуют вершины прямоугольника, изображенного на рис. 1.5.

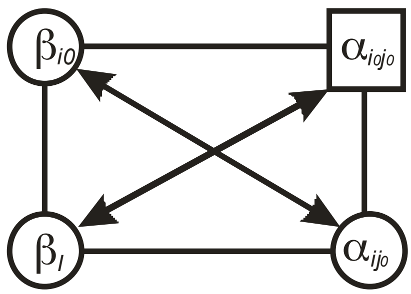


Рис. 1.5. Схема пересчета симплекс- таблицы

Значение же новой компоненты опорного плана $\beta_i^н$ определяется по легко запоминающейся формуле:

$$\beta_i^н = \frac{\alpha_{i_0j_0} \cdot \beta_i^c - \beta_{i_0}\alpha_{ij_0}}{\alpha_{i_0j_0}},$$

которая полностью идентична соотношению из п. 3. Остальные элементы симплекс-таблицы пересчитываются также по правилу прямоугольника, т.е.:

$$\alpha_{ij}^н = \frac{\alpha_{i_0j_0} \cdot \alpha_{ij}^c - \alpha_{i_0j} \cdot \alpha_{ij_0}}{\alpha_{i_0j_0}}.$$

Выполняя процедуры, поименованные в пп. 1-4, получаем новую симплекс-таблицу с новым опорным планом $x^1 = (0{,}5500{,}0{,}0{,}10{,}2500)$.

Таблица 1b

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	x_2	5	5500	0,5	1	2	5	0	0	250
	x_5	0	10	0,04	0	-0,02	-0,1	1	0	
	x_6	0	2500	2,5	0	0	-5	0	1	
Инд. стр.	$f(x^1)$	27500	$\Delta_j = d_j - c_j$	-0,5	0	6	25	0	0	

Значение целевой функции на этом опорном плане $f(x^1) = 27500$. Однако результаты расчета элементов индексной строки показывают, что полученный опорный план не оптимален, т.к. не все элементы неотрицательны. Поскольку отрицательная оценка получена для первого столбца, то в состав базисных вводится переменная x_1. Минимальное симплексное отношение $\theta = 250$ реализуется на элементе второй строки, следовательно, из базиса выводится переменная x_5, а ведущий элемент $\alpha_{i_0 j_0} = 0{,}04$. Переходя к новому опорному плану и пересчитывая симплекс-таблицу, получим новый опорный план $x^2 = (250, 5375, 0, 0, 0, 1875)$.

Таблица 1c

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	x_2	5	5375	0	1	2,25	6,25	-12,5	0	
	x_1	3	250	1	0	-0,5	-2,5	2,5	0	
	x_5	0	1875	0	0	1,25	1,25	-62,5	1	
Инд. стр.	$f(x^2)$	27625	$\Delta_j = d_j - c_j$	0	0	5,75	23,75	1,25	0	

Значение целевой функции на этом опорном плане, $f\left(x^2\right) = 27625$, причем все элементы индексной строки неотрицательны. Следовательно, опорный план X^2 является оптимальным планом ЗЛП, а значение целевой функции $f\left(x^2\right)$ реализует максимум линейной формы на множестве допустимых планов. Значение целевой функции на оптимальном плане определяет максимальную прибыль, которая может быть получена магазином. Переменные x_1 и x_2, входящие в базис, определяют количество товаров A и B, которое должно быть продано для достижения максимальной прибыли. Поскольку переменная x_3 не входит в состав базисных, продажа товара C не приносит магазину прибыль и, следовательно, торговля им нецелесообразна. Значения переменных x_4 и x_5 в оптимальном плане равны нулю и ввиду того, что эти фиктивные переменные были введены для уравнивания ограничений по первому и второму ресурсам, оба эти ресурса в процессе реализации рассчитанного плана товарооборота используются полностью. Переменная x_6 в оптимальном плане является базисной и не равна нулю. Значение этой переменной определяет величину остатка третьего ресурса, т.е. при выполнении оптимального плана товарооборота остается резерв складских помещений в количестве 1875 кв. м, тогда как рабочее время служащих и площадь торговых залов используется полностью.

Решение ЗЛП, сформулированных на отыскании минимума целевой функции, отличается от рассмотренного примера лишь тем, что критерий оптимальности меняет знак, принимая вид $\Delta_j \le 0$ для $\forall j = \overline{1,n}$; и при выборе переменной, вводимой в состав базисных, в индексной строке отыскивается максимальный элемент и соответствующая ему переменная вводится в базис. Все остальные операции пп. 1-4 выполняются в той же последовательности, что и для задачи максимизации. В качестве иллюстрации рассмотрим ЗЛП, не имеющую никакого иного интереса, кроме вычислительного.

Пример 4. Решить ЗЛП:

$$f = min - x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 \le 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5 \\ x_j \ge 0 \ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Приводя ЗЛП к канонической форме, получим:

$$f = min - x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + \ x_6 = 5 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,6. \end{cases}$$

Таблица 2а

№ шага	Базисные переменные	Коэффициент целевой функции при базисных	Значения базисных переменных	Элементы матрицы ограничений						θ
		c_j^5	β_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	x_4	0	5	-1	-1	-2	1	0	0	
	x_5	0	3	2	-3	1	0	1	0	1,
	x_6	0	5	2	-5	6	0	0	1	5
Инд. стр.	$f(x^0)$	0	$\Delta_j = d_j - c_j$	1	-3	-2	0	0	0	

Начальный опорный план задачи содержит переменные x_4, x_5, x_6. Единственный положительный элемент индексной строки соответствует переменной, x_1, которая вводится в базис.

Минимальное симплексное отношение $\theta = 1{,}5$ и реализуется во второй строке таблицы, следовательно, выводится из базиса переменная, x_5, а ведущий элемент $\alpha_{i_0 j_0} = 2$.

Замечание. Минимальное симплексное отношение θ выбирается как минимальное положительное отношение элементов ведущего столбца к элементам столбца β_i, ибо в противном случае в ограничениях ЗЛП нарушается требование не отрицательности переменных. Выполняя действия, поименованные в пп. 1-4, переходим к новому опорному плану $x^1 = (1{,}5, 0, 0, 6{,}5, 0, 2)$ и получаем новую симплекс-таблицу.

Таблица 2b

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	x_4 x_1 x_6	0 -1 0	6,5 1,5 2	0 1 0	-2,5 -1,5 -2	-1.5 0,5 5	1 0 0	0,5 0,5 -1	0 0 1	
Инд. стр.	$f(x^1)$	-1,5	$\Delta_j = d_j - c_j$	0	-1,5	-2,5	0	-0,5	0	

Поскольку все элементы индексной строки не положительны, опорный план ЗЛП оптимален, а значение целевой функции $f(x^1) = -1{,}5$ реализует минимум линейной формы на множестве допустимых планов ЗЛП.

1.7. М – задачи

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме, $min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i; x_j \geq 0\ i = \overline{1,m},$ причем положим, все $b_i \geq 0$.

Преобразуем задачу к канонической форме, для чего вычтем из левых частей неравенств системы ограничений некоторые фиктивные переменные $x_{n+i} \geq 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$, введя их в состав целевой функции с нулевыми коэффициентами. Тогда рассматриваемая ЗЛП примет вид $min\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=n+1}^{n+m}0x_i;\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-x_{n+i}=b_i;\ x_j\geq 0\left(i=\overline{1,m}\right)$. Однако это не облегчает построение начального опорного плана, поскольку из структуры задачи видно, что если принять в качестве базисных переменных $x_{n+i}\left(i=\overline{1,m}\right)$, то оказывается $x_{n+i}=-b_i$, что противоречит требованию неотрицательности переменных. В этом случае к левым частям ограничений ЗЛП в канонической форме добавляются искусственные переменные W_i.

В состав целевой функции эти переменные вводятся с коэффициентами M, где M – очень большое число по модулю. Если ЗЛП сформулирована на отыскании максимума, то $M<0;$ если на отыскание минимума, то $M>0$. Это позволяет получить начальный опорный план с помощью алгоритма, рассмотренного в предыдущем разделе и использовать симплекс-таблицу для решения ЗЛП. Поскольку искусственные переменные W_i вводятся в целевую функцию с очень большими по модулю коэффициентами, очевидно, что решение ЗЛП может быть получено только тогда, когда все искусственные переменные будут выведены из базиса. Если по каким-то причинам это сделать не удается, то ЗЛП не имеет решения. ЗЛП такого типа носит название М-задач. Общая схема приведения произвольной ЗЛП в канонической форме к М-задаче может быть представлена в виде:

$$max\left(min\right)\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad\qquad max\left(min\right)\left[\sum_{i=1}^{n}c_jx_j \quad \sum_{i=1}^{m}Mw_i\right]$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ b_i\geq 0,\left(i=\overline{1,m}\right)\Rightarrow\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+w_i=b_i,\ \left(i=\overline{1,m}\right)$$

$$x_j\geq 0 \qquad\qquad x_j\geq 0;\ w_i\geq 0.$$

Замечание. В отличие от фиктивных переменных искусственные переменные W_i не имеют самостоятельного экономического или физического смысла и вводятся только для получения единичной подматрицы из базисных столбцов.

Пример 5. Решить ЗЛП:

$$f = min\,3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \ge 8 \\ x_3 \ge 1\ x_j \ge 0\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Приводим задачу к каноническому виду:

$$f = min\,3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 = 2 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_5 = 8 \\ x_3 - x_6 \ = 1 \\ x_j \ge 0 \ \ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Сформировать базис из переменных x_4, x_5, x_6 невозможно, т.к. две из них окажутся отрицательны. Добавляем во второе и третье уравнения системы ограничений искусственные переменные W_1 и W_2 и вводим их в целевую функцию с коэффициентами $M > 0$. Полученная М-задача имеет вид:

$$f = min\,3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + Mw_1 + Mw_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_5 + w_1 = 8 \\ x_3 - x_6 + \ w_2 \ = 1 \\ x_j \ge 0\ j = \overline{1,6}\,;\ w_1 \ge 0\ \ w_2 \ge 0. \end{cases}$$

Из переменных x_4, w_1, w_2 можно сформировать базис, а начальный опорный план задачи будет содержать восемь компонентов и иметь вид $x^0 = \left(0,0,0,2,0,0,8,1\right)$. Используя матрицу ограничений М-задачи, заполним симплекс-таблицу (таблица 3а).

Таблица 3а

№ шага	Базисные переменные	Коэффициент целевой функции при базисных	Значения базисных переменных	Элементы матрицы ограничений								θ
		c_j^s	β_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	w_1	w_2	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	x_4	*0*	2	2	1	1	1	0	0	0	0	
	w_1	*M*	8	3	8	2	0	-1	0	1	0	1
	w_2	*M*	1	0	0	1	0	0	-1	0	1	
Инд. стр	$f(x^0)$	9M	$\Delta_j = d_j - c_j$	3M–3	8M–2	3M–3	0	–M	–M	0	0	

Максимальный элемент индексной строки равен $8M - 2$, поэтому вводим в базис переменную x_2. Минимальное симплексное отношение реализуется на элементе второй строки. Ведущий элемент $\alpha_{i_0 j_0} = 8$. Поэтому выводим из базиса переменную w_1 и преобразуем симплекс-таблицу, опуская искусственную переменную w_1, исключенную из базиса (рис. 3b).

Получен новый базис $x^1 = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$, имеющий в своем составе семь компонент, значение целевой функции на котором $f(x^1) = 2 + M$. Максимальный элемент индексной строки равен $M - 2{,}5$, поэтому в базис вводится переменная x_3. Минимальное симплексное отношение реализуется на элементе третьей строки $\theta = 1$. Ведущий элемент $\alpha_{i_0 j_0} = 1$. Поэтому вторая искусственная переменная W_2 выводится из базиса, а симплекс- таблица преобразуется, причем переменная W_2 в нее не включается (рис 3с).

Таблица 3b

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	x_4 x_2 w_2	*0* *2* *M*	1 1 1	1,625 0,375 0	0 1 0	0,75 0,25 1	1 0 0	0,125 -0,125 0	0 0 -1		0 0 1	1
Инд.с.	$f(x^1$	2+M	$\Delta_j = d_j - c_j$	-2,25	0	M–2,5	0	-0,25	–M		0	

Таблица 3c

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	x_4 x_2 x_3	0 2 3	0,25 0,75 1	1,625 0,375 0	0 1 0	0 0 1	1 0 0	0,125 -0,125 0	0,75 0,25 -1			
Инд. стр.	$f(x^2)$	4,5	$\Delta_j = d_j - c_j$	-2,25	0	0	0	-0,25	-2,5			

Получен новый опорный план $x^2 = (0, 0{,}75, 1, 0{,}25, 0, 0)$, имеющий в своем составе шесть компонент, значение целевой функции на котором $f(x^2) = 4{,}5$. Ввиду того, что все искусственные переменные из базиса выведены, а в индексной строке все элементы неположительные, опорный план x^2 является оптимальным планом ЗЛП, а значение целевой функции $f(x^2) = 4{,}5$ реализует минимум линейной формы на множестве допустимых планов.

1.8. Двойственность в линейном программировании

Линейное программирование, как было упомянуто выше, возникло и, впервые, было использовано в качестве инструмента для решения практических задач экономики. Однако экономические задачи не ограничиваются только проблемами производственной сферы. Экономика, как, впрочем, любой другой вид человеческой деятельности, предполагает постоянное взаимодействие многих субъектов, интересы которых не совпадают. Результатом такого взаимодействия всегда является та или иная форма компромисса. Попыткой математического осмысления этого в линейном программировании стала теория двойственности, фрагменты которой рассмотрены в настоящем разделе.

Пусть на некотором предприятии имеется m видов отходов основного производства в объемах, $b_i\left(i=\overline{1.m}\right)$, из которых может быть организован выпуск побочной продукции n различных наименований. Обозначим $a_{ij}\left(j=\overline{1,n}\right)$ норму расхода сырья i-го вида на производство единицы j – го типа продукции, т.е. $\left(a_{ij}\right)_{mxn}$ - технологическая матрица. $C=\left(C_1,C_2...C_n\right)$ – вектор цен на побочную продукцию. В рамках сделанных обозначений имеет смысл следующая задача: найти объемы выпуска побочной продукции $x_{ij}\left(j=\overline{1,n}\right)$, обеспечивающей предприятию наибольший доход от ее реализации. Это типичная ЗЛП полностью аналогичная задаче планирования производства, постановка которой подробно рассмотрена в разделе 1.1.1. Математически она может быть сформулирована в виде: $Z(x)=max\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j;\quad \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i;\quad \left(i=\overline{1,m}\right);\quad x_j\ge 0.$ Будем далее обозначать эту задачу римской цифрой I. В развитие рассмотренной ситуации предположим, что у предприятия существует возможность реализации отходов без переработки. Обозначим $y_{1,}y_2,...y_m$ вектор договорных цен на соответствующие виды отходов. Очевидно, что при формировании этого вектора будут действовать две противоположные тенденции:

1. Покупатель будет заинтересован в минимизации стоимости покупки, т.е. если объем отходов $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, то интерес покупателя может быть записан в виде: $W = min\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$. 2. Предприятию-продавцу же имеет смысл продавать отходы лишь в том случае, когда выручка от продажи будет, по крайней мере, не меньшей, чем при организации собственного производства по их переработке, т.е. когда $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right); \quad y_i \geq 0$. Получена еще одна ЗЛП (обозначим ее I*), которая называется двойственной по отношению к ЗЛП I. И наоборот. Говорят, что задачи I и I* образуют пару задач, двойственных по отношению друг к другу. Запишем эти задачи в матричной форме ЗЛП I: $max < c, x >; Ax \leq b; x \geq 0$. ЗЛП I*: $min < b, y >; A^T y \geq c; y \geq 0$. A^T – транспонированная технологическая матрица A. Анализируя структуру этих задач, можно заметить: 1. Если прямая задача состоит в отыскании максимума некоторой целевой функции, то двойственная к ней в отыскании минимума. И наоборот. 2. Коэффициенты целевой функции прямой задачи образуют вектор ограничений двойственной, а вектор ограничений прямой задачи определяет коэффициенты целевой функции двойственной; соответственно число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной. И наоборот. 3. Матрицы ограничений прямой и двойственной задач получаются одна из другой с помощью транспонирования. Задачи I и I* называются симметричными.

Рассмотрим ЗЛП в канонической форме:

$max\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b\left(i=\overline{1,m}\right);\ x_i \ge 0.$ (Задача II). Для того чтобы сформулировать задачу двойственную к ней по рассмотренной выше процедуре, перейдем к стандартной форме записи, выразив систему ограничений в виде системы неравенств: $max\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i;\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b\left(i=\overline{1,m}\right).$ Помножив второе соотношение на –1, получим ЗЛП в стандартной форме: $max\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b;\quad \sum_{j=1}^{n}\left(-a_{ij}\right)x_j \le -b_i\ \ \left(i=\overline{1,m}\right);\ x_j \ge 0,$ целевая функция которой содержит n переменных, а система ограничений образована $2m$ неравенствами. Очевидно, что в двойственной задаче будет $2m$ переменных и n ограничений. Обозначим эти переменные: y_i' и $y_i''\left(i=\overline{1,m}\right).$ Тогда в соответствии с замечаниями о структуре двойственная задача будет иметь вид:

$$min\ \sum_{j=1}^{n} b_i\left(y_i' - y_i''\right);\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(\,y_i' - y''\,)\quad \left(j=\overline{1,n}\right);\ y_i' \ge 0,\ y_i'' \ge 0.$$

Обозначим $y_i' - y_j'' = y_i$. Относительно знака переменных $y_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ нельзя сделать никаких заключений. Поэтому окончательная формулировка двойственной задачи, если прямая задача каноническая, имеет вид: $min\ \sum_{j=1}^{m} b_i y_i;\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j\left(j=\overline{1,n}\right).$ (Задача II*). Задачи II и II* образуют пару несимметричных взаимно двойственных ЗЛП.

Руководствуясь полученными результатами, можно сформулировать правило построения несимметричных ЗЛП. Если *i*-ое ограничение прямой ЗЛП имеет вид равенства, то *i*-ая переменная двойственной по отношению к ней ЗЛП не будет неотрицательной; если же на *j*-ую переменную прямой ЗЛП не наложено условие неотрицательности, то j-ое ограничение двойственной по отношению к ней ЗЛП будет иметь вид равенства.

Пример 6. Построить ЗЛП, двойственную данной:

$$max(7x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 10x_4 \geq 6 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 \leq 12 \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Для изменения знака первого неравенства умножим его на –1. Тогда $-2x_1 - 3x_2 - x_3 + 10x_4 \leq -6$.

В состав целевой функции двойственной задачи будут входить три переменные, а система ограничений будет составлена из четырех соотношений. Второе ограничение прямой задачи – есть равенство, следовательно, на вторую переменную двойственной задачи не накладывается условие неотрицательности. На третью переменную прямой задачи не наложено условие неотрицательности, значит, третье ограничение двойственной задачи запишется в виде равенства. С учетом сделанных замечаний сформулируем ЗЛП, двойственную исходной:

$$\min(-6y_1 + 8y_2 + 12y_3)$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 7 \\ -3y_1 + y_2 + 5y_3 \geq 4 \\ -y_1 + 8y_2 - 7y_3 = -1 \\ 10y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 5 \\ y_1 \geq 0; \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Двойственная ЗЛП, как математический объект, возникает естественным образом при дополнении модели производственной деятельности моделью деятельности коммерческой. Таким образом, математическая модель существенно обогащается, что позволяет подробнее проанализировать моделируемый объект и получить более содержательные результаты. Действительно, если переменные прямой ЗЛП (задачи I) имеют смысл планов производства, то переменные двойственной ЗЛП (задачи I*) имеют смысл согласованных цен на ресурсы. Иногда их еще называют объективно обусловленными оценками ресурсов, или теневыми ценами.

При рассмотрении правил построения взаимно двойственных ЗЛП были отмечены некоторые формальные признаки связи между ними. Однако наибольший интерес представляют сущностные аспекты этой связи, которые и составляют основную ценность теории двойственности. Обычно они формулируются в виде теорем, называющихся теоремами двойственности.

Теорема 1. Для любых допустимых планов прямой и двойственной ЗЛП $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots y_m)$ справедливо неравенство $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$.

Используя ограничение задачи I*, произведем оценку целевой функции задачи I $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j$. Изменяя порядок суммирования и используя ограничения задачи I, получим оценку $\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \le \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$. Объединяя оценки, доказываем неравенство теоремы.

В содержательном смысле полученное соотношение означает, что для любого допустимого плана производства X и любого допустимого вектора оценок ресурсов Y суммарный доход от реализации продукции не может превосходить суммарной оценки имеющихся ресурсов.

Теорема 2. (Критерий оптимальности Канторовича)

Если для некоторых допустимых планов прямой или двойственной ЗЛП $x^* = ({x^*}_1, {x^*}_2, \ldots {x^*}_n)$ и $y^* = ({y^*}_1, {y^*}_2, \ldots {y^*}_m)$

выполняется соотношение $\sum_{j=1}^{n} c_j x^*{}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y^*{}_i$, $то\ x^*\ и\ y^*$ являются оптимальными планами прямой и двойственной ЗЛП.

Согласно теореме 1, для любых допустимых планов прямой и двойственной ЗЛП x и y $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$. Следовательно, $\sum_{j=1}^{n} c_j x\ {}_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y^*{}_i$, но т.к. по условию $\sum_{j=1}^{n} c_j x^*{}_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y^*{}_i$, то для любого вектора x $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} b_j x^*{}_j$. Это означает, что на плане x^* целевая функция прямой задачи достигает максимума, т.е. x^*является оптимальным планом прямой ЗЛП.

Оптимальность вектора y^* доказывается аналогичными рассуждениями. Фактически это означает, что план производства и вектор оценок ресурса оптимальны тогда, когда общая стоимость произведенной продукции совпадает с суммарной оценкой ресурсов.

Теорема 3. Если прямая и двойственная ЗЛП имеют хотя бы по одному допустимому плану, решения обеих задач существуют.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots y_m)$ некоторые допустимые планы прямой и двойственной ЗЛП соответственно. Согласно Теореме 1, $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$, но это означает, что целевая функция задачи I ограничена сверху, а задачи I* снизу, что доказывает утверждение теоремы.

Полученные результаты позволяют сформулировать основную теорему двойственности, утверждения которой практически очевидны, поскольку естественным образом вытекают из доказанных выше теорем. Доказательство этой теоремы, хотя и не сложное, но громоздкое здесь не приводится.

Теорема 4. Основная теорема двойственности.

Если одна из пары двойственной ЗЛП имеет решение, то имеет его и другая, причем оптимальные значения целевых функций совпадают. Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых планов, то система ограничений другой задачи противоречива.

Экономическое содержание теоремы состоит в том, что если разрешимой является задача отыскания оптимального производственного плана, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Причем план производства и вектор оценок ресурса являются оптимальными тогда и только тогда, когда общая стоимость произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают. Оценки выступают как инструмент балансирования затрат и результатов производственной деятельности. Двойственные оценки гарантируют рентабельность оптимального плана и обуславливают убыточность всякого другого плана производства.

<u>Теорема 5. О дополняющей нежесткости.</u>

Для того, что планы $x^* = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ и $y^* = (y_1, y_2, \ldots y_m)$ пары двойственных ЗЛП были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий: $x_j^*\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right)$ и $y_j^*\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* - b_i\right) = 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right)$.

Необходимость. Рассмотрим пару несимметричных двойственных ЗЛП $Z = max \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j;\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right);\ x_j \geq 0$ и $f = min \sum\limits_{i=1}^{m} b_j y_j;\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \ \left(j = \overline{1,n}\right)$. Если x^* и y^* оптимальные планы этих задач, то, согласно критерию оптимальности Канторовича, $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x^*{}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y^*{}_i$. Используя ограничения прямой задачи и меняя порядок суммирования, получим $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) y_i^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$, отсюда $\sum_{j=1}^{n} x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0$ Но т.к. оба сомножителя неотрицательны, выполнение равенства возможно только при условии $x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0 \;\; для\; \forall\; j = \overline{1,n}.$ Доказательство второго утверждения совершенно аналогично. Достаточность. Суммируя равенства, содержащиеся в условии теоремы, получаем выражение критерия оптимальности Канторовича, что доказывает оптимальность планов x^* и y^*.

Равенства, содержащиеся в условиях теоремы, называются условиями дополняющей нежесткости. Экономический смысл этих соотношений состоит в том, что если в соответствии с оптимальным планом производства расход i–ого ресурса строго меньше его запаса b_i, то в оптимальном плане двойственной задачи соответствующая цена единицы ресурса (теневая оценка) равна нулю, а компонента y_i не входит в состав базиса оптимального плана двойственной ЗЛП. И наоборот, если в результате реализации оптимальной производственной программы i-ый ресурс полностью использован, то i-ая переменная в оптимальном плане двойственной ЗЛП не равна нулю и является базисной компонентой. Таким образом, двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов. Ресурс, полностью используемый в производстве в соответствии с оптимальным планом (дефицитный), имеет положительную оценку, а ресурс избыточный (используемый не полностью) имеет нулевую оценку.

Достигнутые результаты позволяют указать простой и эффективный способ получения решения двойственной ЗЛП при условии, что решение прямой ЗЛП известно.

Пример 7. Сформулируем ЗЛП двойственную по отношению к ЗЛП примера 1, решением которой является вектор $x^{\mathbf{2}}$ = (250, 5375, 0, 0, 0, 1875), а значение целевой функции на этом плане принимает значение $f(x^2) = 27625$ (см. раздел 1.1.5.). В соответствии с правилами построения симметричных двойственных задач она будет иметь вид:

$$min(1100y_1 + 120y_2 + 8000y_3)$$

$$\begin{cases} 0{,}1y_1 + 0{,}05y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ 0{,}2y_1 + 0{,}02y_2 + y_3 \geq 5 \\ 0{,}4y_1 + 0{,}02y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ y_i \geq 0; \quad i = \overline{1{,}3} \end{cases}$$

Поскольку переменные x_1 и x_2 являются базисными компонентами оптимального плана прямой ЗЛП и не равны нулю, то, в соответствии с теоремой о дополняющей нежесткости, первое и второе ограничения двойственной ЗЛП на её оптимальном плане должны выполняться как равенства. Третий ресурс в прямой ЗЛП (складские помещения) используется не полностью (неиспользованный резерв составляет 1875 кв.м), то есть третье ограничение прямой ЗЛП на оптимальном плане выполняется как строгое неравенство. Значит, в соответствии с теоремой о дополняющей нежесткости, третья переменная двойственной ЗЛП в оптимальном плане будет нулевой и в состав базисных входить не будет. Отсюда следует, оптимальные значения переменных y_1 и y_2, на которых достигается минимальное значение целевой функции двойственной ЗЛП, определяются как решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}1y_1 + 0{,}05y_2 = 3 \\ 0{,}2y_1 + 0{,}02y_2 = 5 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим все элементы оптимального плана двойственной ЗЛП: $y_1 = 23{,}75$; $y_2 = 12{,}5$; $y_3 = 0$. Важность полученного решения определяется тем, что появляется возможность оценить, какое влияние на оптимальное значение целевых функций произведет изменение количества того или иного ресурса. В данном примере самым «ценным» ресурсом оказывается y_1 – рабочее время персонала. Изменение его на единицу влечет за собой изменение целевых функций обеих задач на 23,75. Изменение на единицу второго ресурса y_2 – торговых площадей магазина приводит к изменению целевых функций на 12,5. Изменение количества третьего ресурса (площади складов) в пределах 1875 кв.м не изменяет оптимальных значений целевых функций.

1.9. Решение задач с помощью пакета Ms Excel

Рассмотрим следующую постановку: решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel.

Задача.

Найти

$$f(x) = min(3x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

Ограничения имеют вид:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 2$$

$$3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \ge 8$$

$$x_3 \ge 1$$

$$x_j \ge 9,\ j = \overline{1,3}$$

Алгоритм поиска решения.

1. Указать адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения (изменяемые ячейки).

Обозначить переменные через $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, $\boldsymbol{X_3}$. В нашей задаче оптимальные значения вектора $\boldsymbol{X = (X_1, X_2, X_3)}$ будут помещены в ячейках **B3:D3**, оптимальное значение целевой функции в ячейке **E4**.

2. Ввести исходные данные.

Введите исходные данные задачи, как показано на рис.1.6.

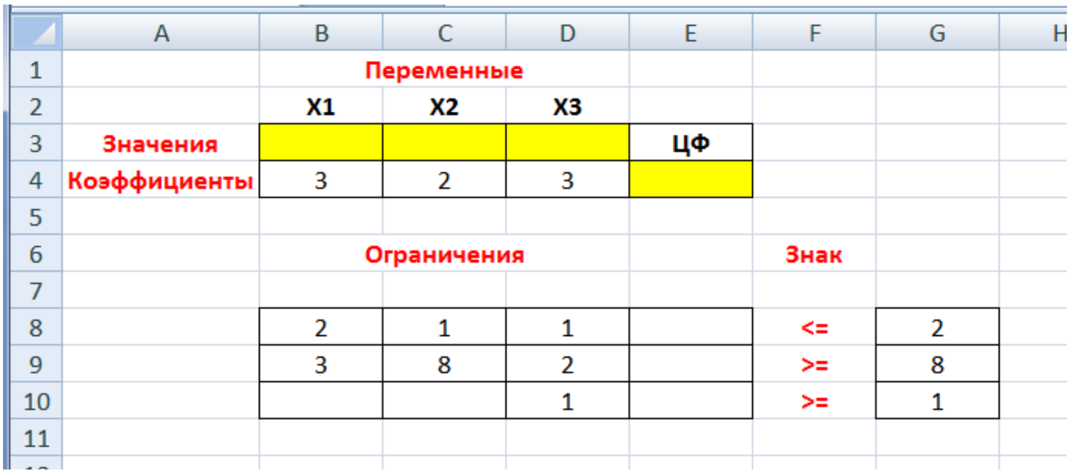


Рис. 1.6. Ввод исходных данных

3. Ввести зависимость для целевой функции

Встать в ячейку **«E4»**.

На Вкладке «Формулы» выбрать «Вставить функцию».

В открывшемся окне в категории «Математические» выбрать функцию **«СУММПРОИЗВ»** (рис. 1.7).

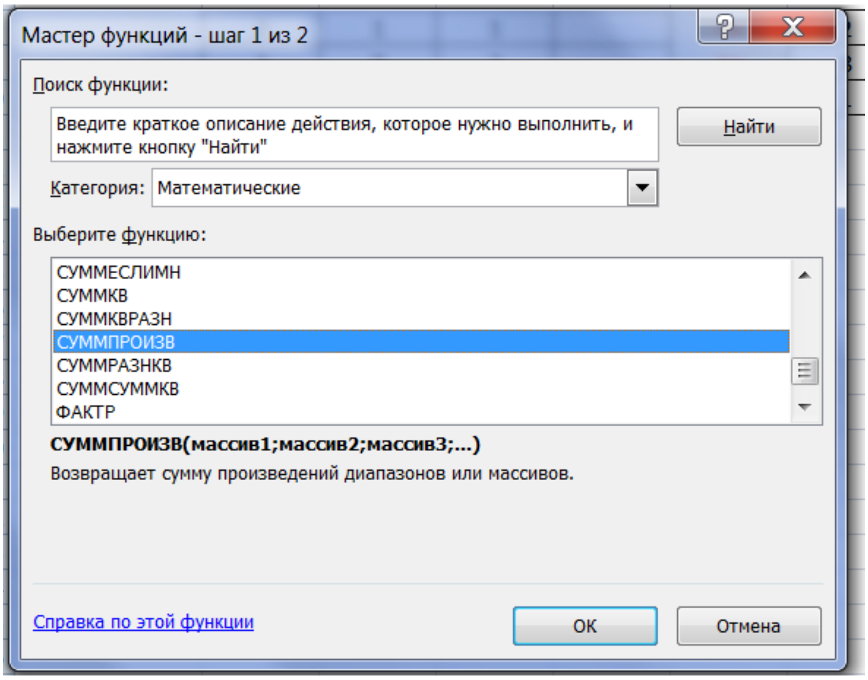


Рис 1.7. Ввод зависимости для целевой функции

Нажать ОК.

На экране появляется диалоговое окно **«Аргументы функции «СУММПРОИЗВ»** (рис. 1.8).

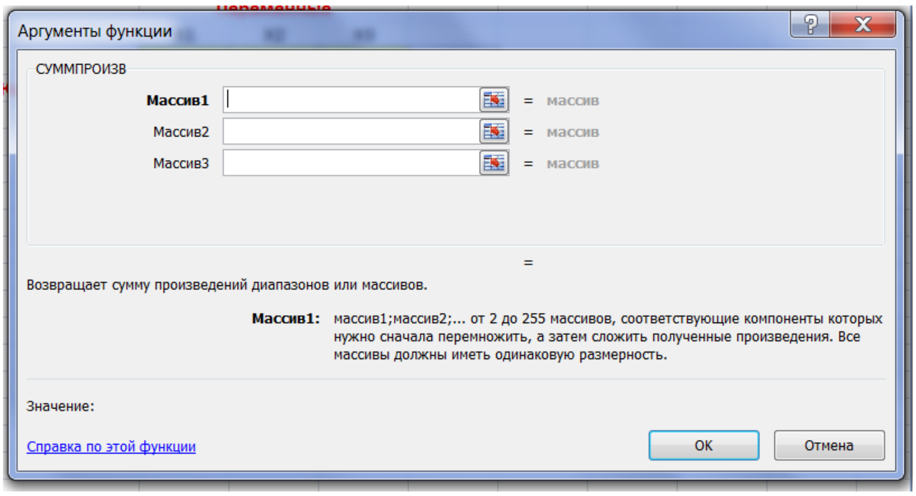


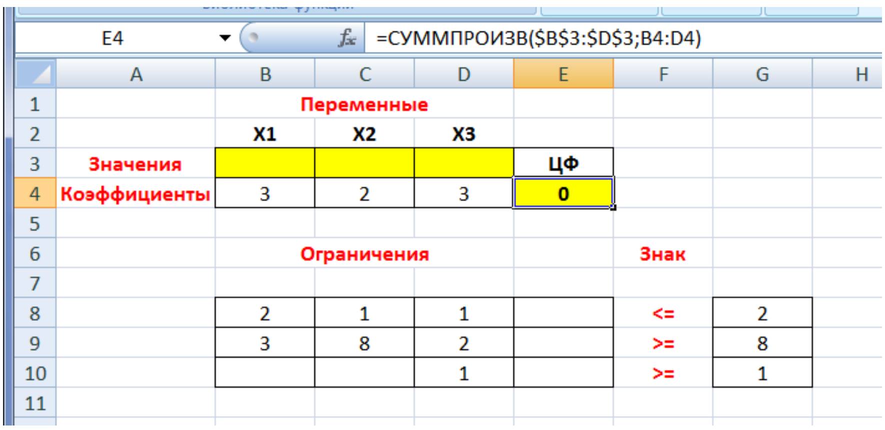
Рис. 1.8. окно «Аргументы функции «СУММПРОИЗВ»

В строку **«Массив 1»**[1] ввести **B3:D3.**

В строку **«Массив 2»** ввести **B4:D4.**

Массив 1 будет использоваться при вводе зависимостей для ограничений, поэтому на этот массив надо сделать абсолютную ссылку[2].

На экране: в ячейку **E4** введена функция (рис. 1.9).



---

[1] **Примечание:** Адреса ячеек во все диалоговые окна удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса следует ввести.

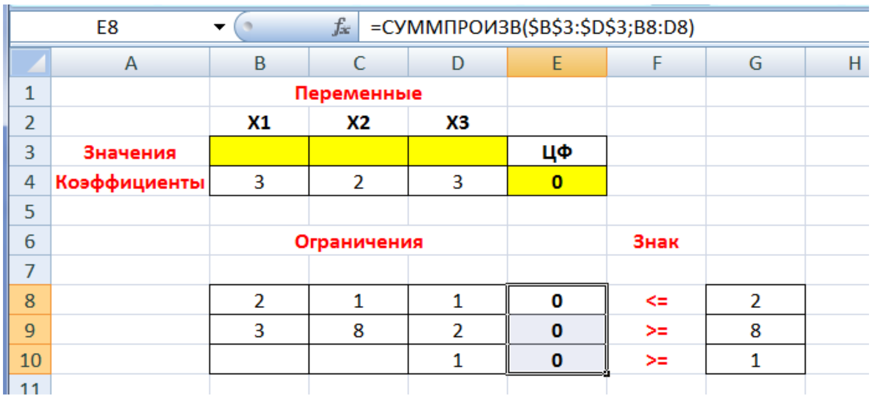
[2] **Относительные и абсолютные ссылки**. В зависимости от выполняемых задач в Excel можно использовать относительные ссылки, определяющие положение ячейки относительно положения ячейки формулы, или абсолютные ссылки, которые всегда указывают на конкретные ячейки. Если перед буквой или номером стоит знак доллара, например, $A$2, то ссылка на столбец или строку является абсолютной. Относительные ссылки автоматически корректируются при их копировании, а абсолютные ссылки – нет.

Рис. 1.9. Ввод функции

4. Ввести зависимости для ограничений.

Встать в ячейку «**E4**» и скопировать ее**.**

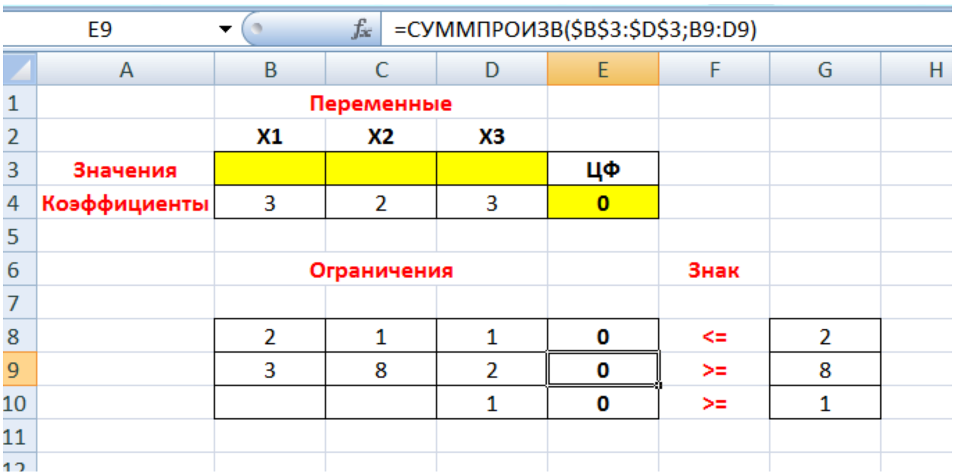
Вставить скопированное из ячейки «**E4**» в ячейки «**E8**», «**E9**», «**E10**». При этом ячейки будут выглядеть так, как показано на рис. 1.10.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2		X1	X2	X3				
3	Значения				ЦФ			
4	Коэффициенты	3	2	3	0			
5								
6			Ограничения			Знак		
7								
8		2	1	1	0	<=	2	
9		3	8	2	0	>=	8	
10				1	0	>=	1	

Рис. 1.10. Вид заполненных ячеек

<u>Примечание</u>. Содержимое ячеек **E8 – E10** необходимо проверить. Они **обязательно** должны содержать информацию, как это показано для примера на рис. 1.11 (в качестве примера представлено содержимое ячейки **E9**).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2		X1	X2	X3				
3	Значения				ЦФ			
4	Коэффициенты	3	2	3	0			
5								
6			Ограничения			Знак		
7								
8		2	1	1	0	<=	2	
9		3	8	2	0	>=	8	
10				1	0	>=	1	
11								

Рис. 1.11. Вид заполненных ячеек

На **«Главной панели»** выбрать **«Данные»,** затем **«Поиск решения».** Появляется диалоговое окно **«Поиск решения»** (рис. 1.12).

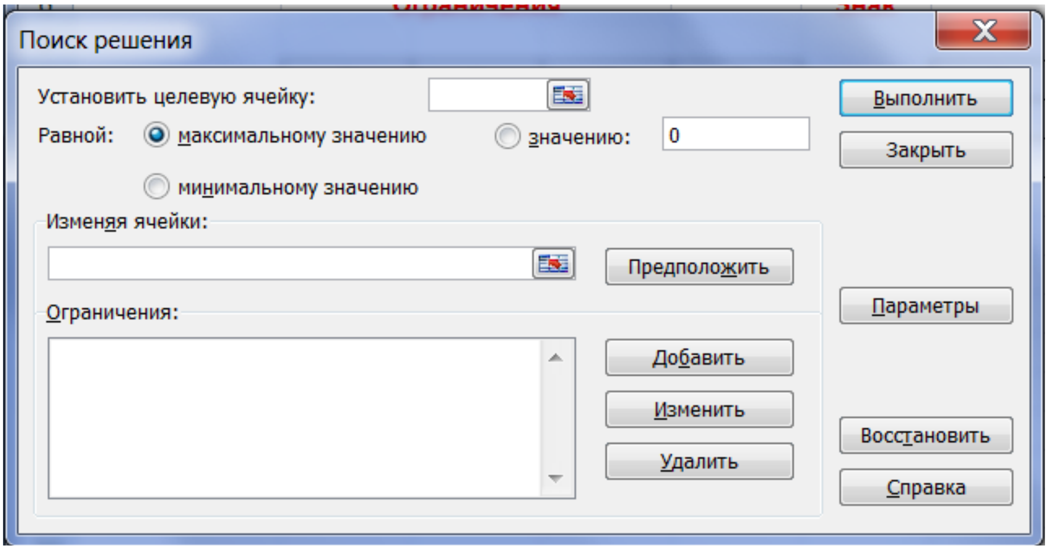


Рис. 1.12. Вид окна «Поиск решения»

5. Назначить целевую функцию (установить целевую ячейку), указать адреса изменяемых ячеек.

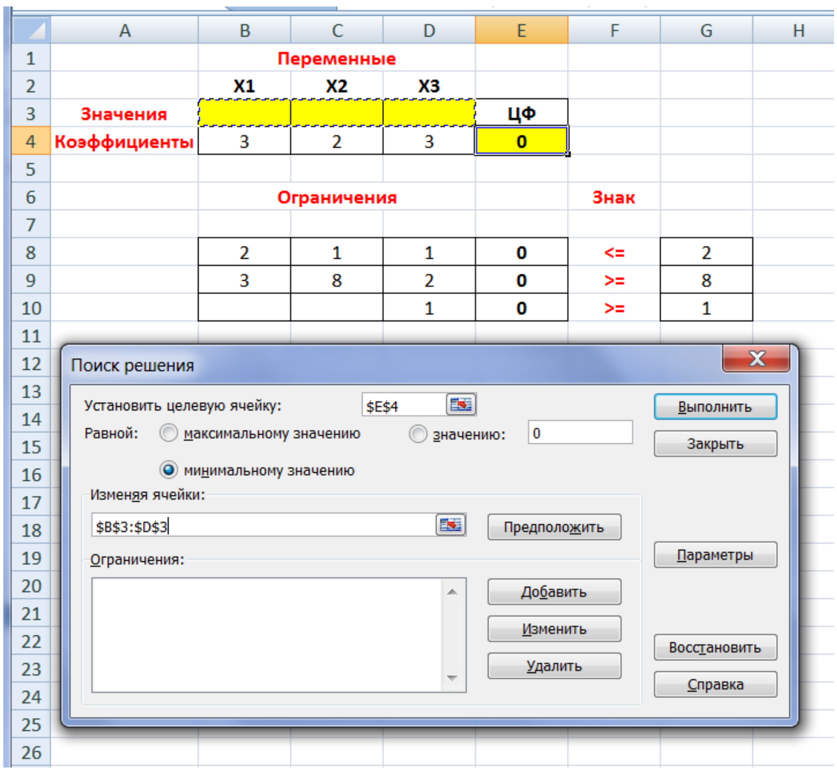


Рис. 1.13.Установка целевой функции

В строку **«Установить целевую ячейку»**, введите адрес ячейки **«$E$4».**

Введите направление целевой функции равной**: Минимальному значению.**

В строку **«Изменяя ячейки»** ввести адреса для значений искомых переменных **$B$3:$D$3** (рис. 1.13).

6. Ввести ограничения

Для ввода ограничений нажать на кнопку **«Добавить».**

В строке **«Ссылка на ячейку»** введите адрес **$E$8.**

Ввести знак ограничения ≤.

В строке **«Ограничение»** введите адрес **$G$8** (рис. 1.14).

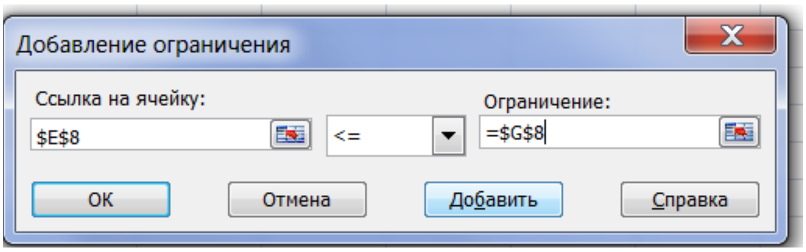


Рис. 1.14.Ввод адресов

Нажать на кнопку **«Добавить».**

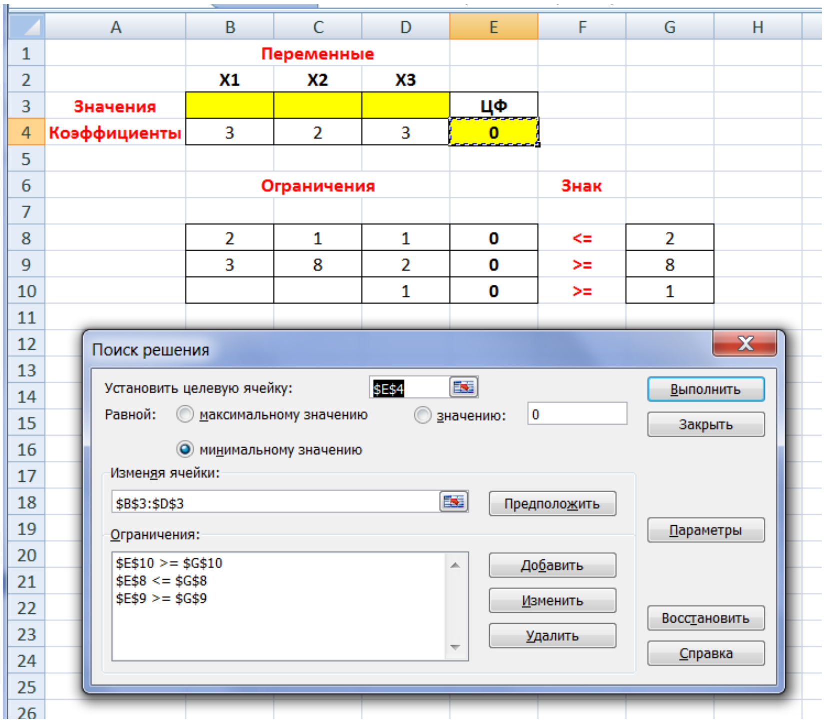


Рис.1.15. Окно «Добавление ограничения».

На экране вновь появится диалоговое окно **«Добавление ограничения».**

Ввести остальные ограничения задачи, по выше описанному алгоритму

После введения последнего ограничения кнопка **«ОК».**

На экране появится диалоговое окно **«Поиск решения»** с введенными условиями (рис.1.15).

7. Ввести параметры для решения ЗЛП

В диалоговом окне выбрать кнопку **«Параметры».** На экране появляется диалоговое окно **«Параметры поиска решения»** (рис. 1.16).

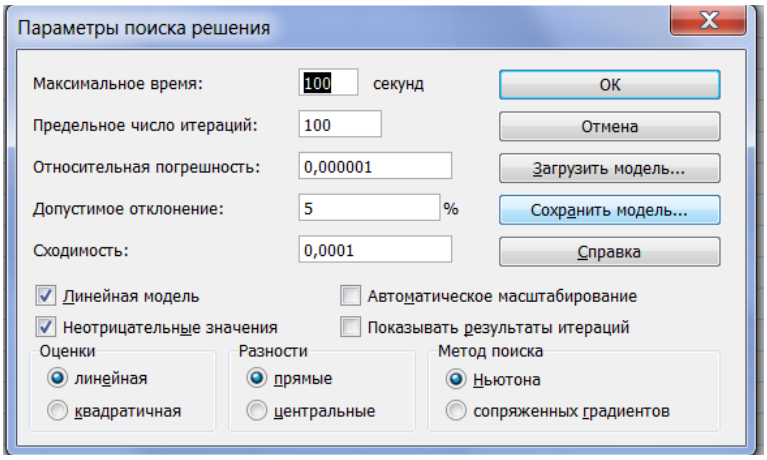


Рис.1.16. Окно «Параметры поиска решения»

Установите флажки в окнах **«Линейная модель»** (это обеспечит применение симплекс - метода) и **«Неотрицательные значения»** и нажать на кнопку **«ОК»**.

Появится диалоговое окно **«Поиск решения»** в котором нажать на кнопку **«Выполнить».**

Появится диалоговое окно **«Результаты поиска решения»** и исходная таблица с заполненными ячейками **B3:D3** для значений X_i и ячейка **E3** с максимальным значением целевой функции (рис.1.17).

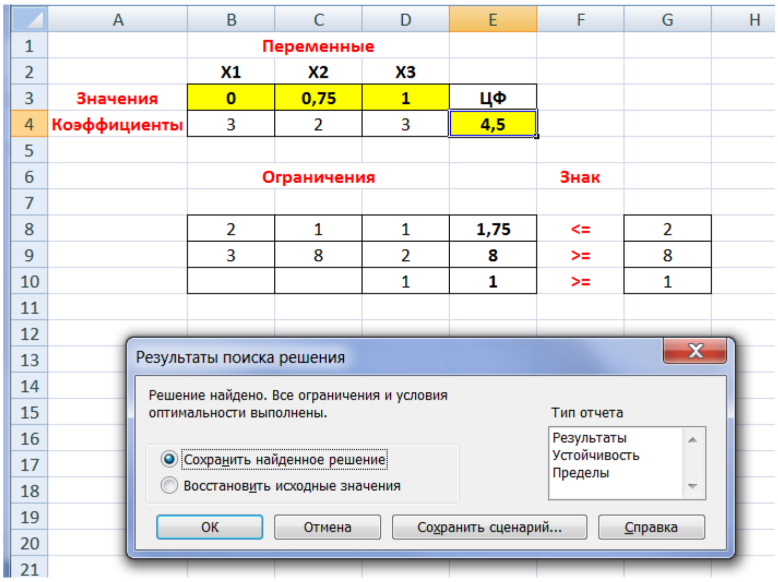
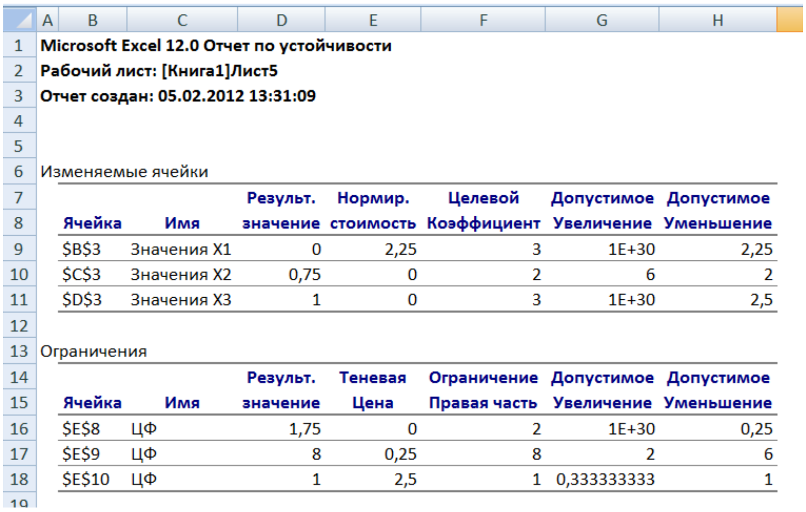


Рис.1.17. Окно «Результаты поиска решения»

Если указать тип отчета «Устойчивость», то можно получить дополнительную информацию об оптимальном решении (рис. 1.18) которая разместиться на новом листе Excel.



Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1]Лист5
Отчет создан: 05.02.2012 13:31:09

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$3	Значения X1	0	2,25	3	1E+30	2,25
$C$3	Значения X2	0,75	0	2	6	2
$D$3	Значения X3	1	0	3	1E+30	2,5

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$E$8	ЦФ	1,75	0	2	1E+30	0,25
$E$9	ЦФ	8	0,25	8	2	6
$E$10	ЦФ	1	2,5	1	0,333333333	1

Рис. 1.18. Новый лист Excel

В результате решения задачи получили ответ:

X1 = 0 ,

X2 = 0,75,

X3 = 1,

F(x) = 4,5.

1.10. База вопросов для тестового контроля

Тест. Вопросы для оценки качества полноты (POL) усвоенных знаний (раздел 1)

1. Когда возложен переход от ЗЛП, сформулированной в стандартной форме, к ЗЛП, сформулированной в канонической форме?

   *a) всегда

   b) только при условии неотрицательности переменных, входящих в состав целевой функции

   c) невозможен.

2. Когда впервые была сформулирована задача линейного программирования?

   a) в конце 19-го века

   *b) в середине 20-го века

   c) в конце 20-го века.

3. Могут ли некоторые переменные ЗЛП входить в состав системы ограничений нелинейно?

   a) могут безоговорочно

   b) могут, если система ограничений ЗЛП задана в общей форме

   *c) нет

4. Можно ли сформулировать ЗЛП, если целевая функция имеет вид: $2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4$.

   *a) ничего определенного сказать нельзя, пока неизвестен вид ограничений;

   b) можно;

   c) нельзя.

5. Могут ли некоторые переменные, входящие в состав целевой функции ЗЛП отсутствовать в каких либо ограничениях?

   a) нет;

b) могут только в том случае, если на них не наложено требование неотрицательности;

*c) да.

6. Наискорейший рост линейной функции $2x_1 + 5x_2 - 3x_3$ происходит в направлении вектора с компонентами:

*a) $(2, 5, -3)$;

b) $(-2, -5, 3)$;

c) $(2, 5, 3)$.

7. Опорным планом ЗЛП называется:

*a) любая крайняя точка множества допустимых планов;

b) любая граничная точка множества допустимых планов;

c) любая точка множества допустимых планов, вблизи которой целевая функция неограниченно возрастает.

8. Чему равно число ненулевых компонент в точках опорных планов ЗЛП?

a) числу переменных, входящих в состав целевой функции;

b) числу неотрицательных переменных входящих в состав целевой функции.

*c) числу линейно-независимых столбцов системы ограничений.

9. Указать в каком отношении находятся ранг системы линейных уравнений r и число переменных n, входящих в состав этой системы

*a) $r \le n$;

b) $r \ge n$;

c) $r > n$.

10. В процессе решения ЗЛП с помощью симплекс метода число базисных переменных:

*a) не изменяется;

b) увеличивается;

c) уменьшается.

11. С какой целью в состав ЗЛП вводятся фиктивные переменные?

*a) для приведения ЗЛП к канонической форме;

b) для увеличения числа базисных переменных;

c) для увеличения числа свободных переменных.

12. Число нулевых компонент в составе любого опорного плана ЗЛП

a) не может превосходить число ненулевых компонент этого плана;

b) не может быть меньше числа ненулевых компонент этого плана;

*c) возможно как то, так и другое.

13. Если решение ЗЛП существует, то:

a) оно совпадает с какой либо граничной точкой множества допустимых планов этой ЗЛП.

*b) оно совпадает по крайней мере с одной крайней точкой множества допустимых планов этой ЗЛП.

c) оно совпадает с одной из критических точек целевой функции этой ЗЛП.

14. Если система ограничений ЗЛП содержит противоречащие друг другу ограничения, то:

a) множество допустимых планов ЗЛП неограниченно;

b) ЗЛП имеет бесчисленное множество решений;

*c) множество допустимых планов ЗЛП пусто.

15. Какие из перечисленных утверждений верны:

*a) из элементов базисных столбцов симплекс-таблицы всегда можно сформировать единичную матрицу;

*b) любой базисный столбец симплекс-таблицы содержит не более одного ненулевого элемента;

c) любая матрица, сформированная из базисных столбцов симплекс-таблицы, вырождена.

16. Как выбирается ведущий столбец симплекс таблицы, если ЗЛП сформирована на отыскании минимума целевой функции?

*a) в индексной строке отыскивается максимальный положительный элемент и соответствующий ему столбец выбирается ведущим;

b) в индексной строке отыскивается минимальный отрицательный элемент и соответствующий ему столбец выбирается ведущим;

c) ведущим выбирается столбец сумма элементов которого максимальна.

17. При пересчёте симплекс таблицы в связи с переходом к новому опорному плану элемент, стоящий в позиции разрешающего элемента становится равен:

a) нулю;

b) величине минимального симплексного отношения.

*c) единице;

18. Что является критерием оптимальности опорного плана, если ЗЛП сформирована на отыскание максимума целевой функции?

*a) неотрицательность элементов индексной строки;

b) неположительность элементов индексной строки;

c) отсутствие в индексной строке не целых чисел.

19. Как вычисляются элементы ведущий строки при пересчете симплекс таблицы при переходе к новому опорному плану?

a) все элементы получаются путем умножения элементов ведущий строки на разрешающий элемент;

*b) все элементы получаются путем деления элементов ведущий строки на разрешающий элемент;

c) элементы ведущей строки не изменяются.

20. Как называется правило, применяемое для отыскания компонент нового опорного плана при реализации табличного варианта симплекс метода?

*a) правило прямоугольника;

b) правило Крамера;

c) правило Канторовича.

Тест. Вопросы для оценки качества целостности (CHL) усвоенных знаний (раздел 1)

1. Если целевая функция неограниченна на множестве допустимых планов ЗЛП, то:

*a) множество допустимых планов ЗЛП не замкнуто;

b) множество допустимых планов ЗЛП не выпукло;

c) множество допустимых планов ЗЛП пусто;

*d) ЗЛП не имеет решения.

2. Если система ограничений ЗЛП содержит противоречащие друг другу ограничения, то:

a) Множество допустимых планов ЗЛП неограниченно;

b) ЗЛП имеет бесчисленное множество решений;

*c) Множество допустимых планов ЗЛП пусто.

3. Когда ЗЛП имеет бесчисленное множество решений?

a) если множество допустимых планов ЗЛП неограниченно;

*b) если по крайней мере две крайние точки множества допустимых планов являются оптимальными планами этой ЗЛП;

c) ЗЛП не может иметь бесчисленное множество решений.

4. Найдите значение целевой функции ЗЛП на оптимальном плане ЗЛП.

$\mathbf{max}\ (2{,}5x_1 + 4{,}5x_2)$

$2x_1 + 3x_2 \leq 300$

$x_1 + 3x_2 \leq 270$

$4x_1 + x_2 \leq 400\ x_j \geq 0\ \mathrm{j} = \overline{1{,}2}.$

*a) 435.

b) 465.

c) 515.

5. Найдите значение целевой функции на оптимальном плане ЗЛП.

max $(10x_1 + 8x_2)$

$0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 \leq 40$

$0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 \leq 28$

$0{,}1x_1 \leq 6$ $x_j \geq 0$ $j = \overline{1{,}2}.$

a) 80.

b) 72

*c) 800.

6. Найдите значение целевой функции на оптимальном плане ЗЛП.

Min $(6x_1 + 7x_2)$

$4x_1 + 2x_2 \leq 48$

$3x_2 \leq 36$

$2x_1 + 2x_2 \leq 40$

$15x_1 + 12x_2 \geq 120$ $x_j \geq 0$ $j = \overline{1{,}2}.$

a) 54.

*b) 48.

c) 70.

7. Найдите значение целевой функции на оптимальном плане ЗЛП.

max $(7x_1 + 10x_2)$

$0{,}7x_1 + 0{,}6x_2 \leq 70$

$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 14$

$0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 \leq 15$ $x_j \geq 0$ $j = \overline{1{,}2}.$

a) 240.

b) 620.

*c) 840.

8. Найдите значение целевой функции на оптимальном плане ЗЛП.

max $(2x_1 +1{,}5x_2)$

$20 x_1 + 10x_2 \leq 60$

$x_1 + x_2 \leq 40$ $x_j \geq 0$ $j = \overline{1{,}2}.$

a) 8;

*b) 9;

c) 12.

9. Чему равны коэффициенты при искусственных переменных в целевой функции ЗЛП, если задача сформирована на отыскание максимума:

*a) очень большому по модулю отрицательному числу;

b) очень большому по модулю положительному числу;

c)нулю.

10. Могут ли искусственные переменные входить в состав базисных оптимального плана М – задачи.

*a) не могут;

b) могут;

c) могут только при условии, что в состав базисных не входят фиктивные переменные.

11. Можно ли для любой ЗЛП сформулировать двойственную по отношению к ней:

a) можно только для тех ЗЛП, в которых количество переменных больше количества ограничений;

b) можно только для тех ЗЛП, в которых ограничения сформулированы в виде неравенств;

*c) можно для любой.

12. Если на j – ую переменную прямой ЗЛП не наложено условие неотрицательности то:

*a) j-ое ограничение двойственной ЗЛП имеет вид строгого равенства;

b) j-ое ограничение двойственной ЗЛП имеет вид неравенства;

c) j-ая переменная двойственной ЗЛП так же не будет неотрицательной.

13. Построить ЗЛП двойственную данной

$$max(2x_1 + 3x_2 - x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 & x_1 \ge 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 3 & x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$min\,(7y_1 + 3y_2)$$

*a) $\begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ -3y_1 + y_2 = 3 \\ 5y_1 + 2y_2 \geq -1 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$

$$min\,(7y_1 + 3y_2)$$

b) $\begin{cases} y_1 + 3y_2 = 2 \\ -3y_1 + y_2 \geq 3 \\ 5y_1 + 2y_2 = -1 \\ y_1 \geq 0; \quad y_2 \geq 0 \end{cases}$

$$min\,(3y_1 + 7y_2)$$

c) $\begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 2 \\ -3y_1 + y_2 \leq 3 \\ 5y_1 + 2y_2 \geq -1 \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$

14. Если в некоторых точках множества допустимых планов x^* и y^* прямой и двойственной ЗЛП целевые функции задач равны друг другу, то:

a) x^* и y^* являются внутренними точками множества допустимых планов своих ЗЛП;

*b) точки x^* и y^* являются решениями соответственно прямой и двойственной ЗЛП;

c) ничего определённого о свойствах точек x^* и y^* сказать нельзя.

15. Может ли целевая функция ЗЛП, сформулированной на отыскание максимума, превосходить целевую функцию двойственной ЗЛП:

a) может, если все коэффициенты целевой функции неотрицательны;

b) может, если все переменные неотрицательны.

*c) не может;

16. Если одна из пары двойственных ЗЛП имеет решение, то:

*a) другая так же имеет решение;

b) другая ЗЛП решения не имеет;

c) ничего определённого о другой ЗЛП сказать нельзя.

17. Если ЗЛП сформулирована на отыскание максимума можно ли двойственную к ней ЗЛП так же сформулировать на отыскание максимума:

*a) нельзя;

b) можно, но эта задача не будет иметь решения;

c) можно, при условии что все переменные исходной ЗЛП неотрицательны.

18. Если известна технологическая матрица ЗЛП, то технологическая матрица двойственной ЗЛП получается:

a) путем обращения технологической матрицы исходной ЗЛП;

*b) путем транспонирования технологической матрицы исходной ЗЛП;

c) путем приведения технологической матрицы исходной ЗЛП к диагональному виду.

19. Если в соответствии с оптимальным планом производства расход j-ого ресурса строго меньше его запасов, то:

*a) в оптимальном плане двойственной задачи оценка единицы этого ресурса равна нулю;

b) j-ая переменная двойственной ЗЛП не входит в состав базиса в её оптимальном плане;

c) j-ая переменная двойственной ЗЛП входит в состав базиса в её оптимальном плане.

20. Какой закон диалектики иллюстрируется на примере двойственности в линейном программировании:

a) закон отрицания отрицания:

b) закон перехода количественных изменений в качественные;

*c) закон единства и борьбы противоположностей.

1.11. База учебных проблем и задач

Комментарий 1. Разрешение любой проблемы, как правило, представляет собой многоэтапную операцию. На первом этапе, на основе своих знаний и способностей, проблема преобразуются в известные задачи. Эта операция **(операция А)** преобразования проблемы в задачи называется **формализацией** проблемы. На втором этапе разрешения проблемы (на основе и за счет знаний и способностей) происходит построение конструкта (алгоритма) для поиска решения задач, полученного на первом этапе, т.е. на втором этапе происходит операция **(операция В) конструирования** решения задач. И наконец, на третьем этапе происходит операция **исполнения (операция С)** полученного конструкта в реальной (виртуальной) среде. Разумеется, будущий инженер должен уметь делать все операции, т.е. обладать следующими способностями: 1) формализовать проблему, 2) конструировать решение, для полученных при этом задач и 3) реализовать их в среде.

Очевидно, проблемы бывают разной сложности. Сложности проблем будем оценивать через трудоемкость разрешения их экспертом в (час/раб). Например, пусть сложность ПРОБЛЕМЫ Х, равна 0,5 (час/раб) эксперта, коротко запишем так S(X) = 0,5 (час/раб). Это означает, что за полчаса эксперт полностью разрешит проблему, т.е. сделает всю работу целиком. Другой пример, допустим сложность ПРОБЛЕМЫ У, т.е. S(У) = 5 (час/раб) эксперта. Это будет означать, что эксперт может выполнить всю работу целиком по разрешению проблемы за пять часов. Таким образом, в примере ПРОБЛЕМА У в 10 раз сложнее ПРОБЛЕМЫ Х.

Комментарий 2. В учебном пособии при оценке сложности учебных задач будем использовать размерность (мин/раб). Для краткости, размерность не будем записывать, а употреблять по умолчанию, например, допустим трудоемкость задачи x эксперт оценил как S(x) = 15 (мин/раб). В пособии будет записано как S(x) = 15.

Блок задач 1

Формализовать учебные проблемы. Проверить правильность полученных результатов посредством геометрических построений и дать их содержательную интерпретацию.

№ 1. Для изготовления двух видов соков используются слива, черника и клубника. Общее количество сливы – 300 кг, – 270 кг, клубники – 400кг. На изготовление одной трехлитровой банки сока первого вида идет 2 кг сливы, 1 кг черники и 4 кг клубники, а на такой же объём сока второго вида идет 3 кг сливы, 3 кг черники и 1 кг клубники. Найти оптимальный план производства соков, обеспечивающий наибольшую прибыль от продажи продукции, если цена одной банки сока первого вида составляет 2,5 д.е., а одной банки сока второго вида 4,5 д.е.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1)=15.

№ 2. Для обработки малахита и агата, из которых изготавливаются украшения, используются три вида оборудования. Малахитовая заготовка обрабатывается на оборудовании первого вида 0,5 часа, на оборудовании второго вида 0,2 часа, на оборудовании третьего вида 0,1 часа. Агатовая заготовка обрабатывается на оборудовании первого вида 0,4 часа, на оборудовании второго вида 0,4 часа, а оборудование третьего вида для обработки агата не применяется. Фонд рабочего времени оборудования составляет 40, 28 и 6 часов соответственно. Найти оптимальный план производства украшений, обеспечивающий максимальную прибыль от их продажи, если цена малахитового украшения 10 д.е., а агатового 8 д.е.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1) = 15.

№ 3. При подкормке посевов необходимо внести на 1 га не менее 21 ед. вещества A и не менее 16 ед. вещества В. Агрокомплекс закупает комбинированные удобрения двух видов. В 1 кг удобрения первого вида содержание веществ A и B 12 и 4 ед. соответственно. В 1 кг удобрения второго вида 3 и 4 соответственно. Спланировать закупку удобрений так, чтобы затраты на их закупку были минимальными, при условии, что цена 1 кг первого вида удобрения 5 д. е., а второго - 2 д. е.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1) = 15.

№ 4. На трех станках обрабатываются два вида изделий B_1 и B_2. Трудоемкость обработки одного изделия B_1 на каждом станке составляет 4, 0 и 2 часа соответственно, а одного изделия B_2 2, 3 и 2 часа. Фонд полезного времени работы первого станка 48 часов, второго 36 часов, третьего 40 часов. Цена единицы изделия B_1 составляет 15 д.е., а изделия B_2 12 д.е. Найти план производства изделий, обеспечивающий выполнение плана не менее чем на 120 д.е. при наименьшей загрузке оборудования.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1) = 15.

№ 5. Для приобретения станков автоматов и полуавтоматов предприятие располагает средствами в количестве 60 тыс. д.е. Новое оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 40 кв. м. Станок автомат стоимостью 20 тыс. д.е. занимает площадь 1 кв.м и обладает производительностью 2 тыс. единиц продукции в смену. Стоимость станка полуавтомата составляет 10 тыс. д.е., площадь для его размещения также составляет 1 кв. м, а производительность 1,5 тыс. единиц продукции в смену. Найти оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимум общей производительности.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1) = 15.

№ 6. На участке цеха имеется три группы оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Одна деталь вида **А** обрабатывается на токарном станке в течении 2 часов, на фрезерном станке в течении 1 часа, а шлифовальное оборудование для обработки деталей **А** не применяется. Одна деталь вида **Б** обрабатывается на токарном станке 2 часа, на фрезерном 2 часа, на шлифовальном 4 часа. Фонд рабочего времени токарного оборудования составляет 14 часов, фрезерного 11 часов, шлифовального 16 часов. Найти план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную загрузку оборудования.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1) = 15.

№ 7. Для изготовления двух видов овощного ассорти используются помидоры в количестве 75 кг, огурцы в количестве 135 кг и перец в количестве 45 кг. На одну банку ассорти первого вида идет 1 кг помидоров, 1,5 кг огурцов и 0,5 кг перцев; на одну банку ассорти второго вида идет 0,5 кг помидоров, 1 кг огурцов и 0,5 кг перцев. Найти оптимальный план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль, если продажная цена банки ассорти первого вида равна 2 д.е., а банки ассорти второго вида 1,5 д.е.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1) = 15.

№ 8. Для пошива женских и мужских костюмов используется три вида тканей, запасы которых составляют 21, 27 и 5 метров соответственно. На один женский костюм требуется 2 м ткани первого вида, 4 м второго вида и 1 м третьего; на один мужской костюм требуется 3 м ткани первого вида, 3 м ткани второго вида, а ткань третьего вида при пошиве мужских костюмов не используется. Сколько и каких костюмов следует пошить, чтобы получить максимальную прибыль от их реализации, если продажная цена и тех и других костюмов одинакова и равна 40 д.е.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1) = 15.

№ 9. Для приобретения оборудования выделено 20 млн. руб. Площадь производственного участка равна 72 м^2. Предприятие может заказать оборудование двух видов: машины типа А, цена которых 5 млн. руб., занимающие площадь 6 м^2 и способные производить 8 тыс. ед. продукции в смену и машины типа В, цена которых 2 млн. руб., занимающие площадь 12 м^2 и способные производить 3 тыс. ед. продукции в смену. Найти оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную производительность.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1) = 15.

№ 10. Два изделия в процессе изготовления проходят обработку на дух станках. Первое изделие обрабатывается 3 часа на первом станке и 4 часа на втором, а второе изделие по 4 часа на каждом станке. Фонд рабочего времени первого станка составляет 48 часов, а второго станка 64 часа. Цена одного изделия первого вида составляет 10 тыс. руб., а единица изделия второго вида 12 тыс. руб. Найти план производства, обеспечивающий выполнение плана не менее чем на 120 тыс. руб. при максимальной загрузке оборудования.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1) = 15.

№ 11. Для изготовления двух видов изделий B_1 и B_2 используются три вида сырья. Запасы сырья первого вида составляют 120 кг, второго вида 200 кг, третьего вида 180 кг. Для изготовления единицы изделия B_1 используется 4 кг сырья первого вида, 10 кг сырья второго вида, а сырье третьего вида не используется. Для изготовления единицы изделия B_2 используется 3 кг сырья первого вида, 10 кг сырья второго вида и 15 кг сырья третьего вида. Найти план производства, обеспечивающий максимальную прибыль, если прибыль от реализации единицы изделия B_1 составляет 5 ден. ед., а от реализации единицы изделия B_2 – 8 ден. ед.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1) = 15.

№ 12. Предприятие располагает производственными мощностями (в часах) четырех видов: N_1=16, N_2=10, N_3=6, N_4=7. Эти мощности задействованы в производстве двух изделий. В производстве одного изделия первого вида затраты мощностей составляют 2; 1; 0; 1 часов соответственно, а в производстве одного изделия второго вида 1; 1; 1; 0 часов. Прибыль от реализации одного изделия первого вида равна 3 ден.ед., а одного изделия второго вида 4 ден. ед. Найти план производства, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(1) = 15.

Блок задач 2

№ 1. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = min(x_1 - 3x_2)$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

№ 2. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = max(12x_1 + 15x_2)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

№ 3. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = max(2x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

№ 4. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = min(2x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

№ 5. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = max(10x_1 + 8x_2)$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 \le 1000 \\ 30x_1 + 40x_2 \le 3600 \\ 0,1x_1 \le 70 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

№ 6. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = max(9x_1 + 8x_2)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 106 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 120 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

№ 7. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = max(2x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1 \le 10 \\ x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

№ 8. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = max(x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 \le 14 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

№ 9. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = max(3x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

№ 10. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = max(-x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 2 \\ 2x_1 - x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

№ 11. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = min(2 + x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \ge -4 \\ x_1 + 3x_2 \ge 4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

№ 12. Найти решение или доказать его отсутствие с помощью геометрических построений

$$f = max(x_1 + x_2 + 3)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 \ge -2 \\ -x_1 + x_2 \ge -1 \\ 2x_1 + x_2 \ge -2 \end{cases}$$

Сложность задачи S(2) = 5.

Блок задач 3

№ 1. Решить с помощью симплекс-таблиц.

$$f = max\,(\,x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4\,)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Сложность задачи S(3) = 20.

№ 2. Решить с помощью симплекс-таблиц.

$$f = max\,(8x_1 + 2x_2 + 5x_3\,)$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 7$$

$$x_1 - 3x_2 + 11x_3 \ge 5$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,3}.$$

Сложность задачи S(3) = 20.

№ 3. Решить с помощью симплекс-таблиц.

$$f = max\,(\,x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4\,)$$

$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 \le -1$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 3$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}$$

Сложность задачи S(3) = 20.

№ 4. Решить с помощью симплекс-таблиц.

$$f = min(7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4\,)$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 12$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 10$$

$$3x_1 + 5x_2 \qquad + 4x_4 = 7$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,4}.$$

Сложность задачи S(3) = 20.

№ 5. Решить с помощью симплекс-таблиц.

$$f = max(-2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5)$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Сложность задачи S(3) = 20.

№ 6. Решить с помощью симплекс-таблиц.

$$f = max(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4 \\ x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Сложность задачи S(3) = 20.

№ 7. Решить с помощью симплекс-таблиц.

$$f = min(-3x_1 + x_2 + 3x_3 - 34x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Сложность задачи S(3) = 20.

№ 8. Решить с помощью симплекс-таблиц.

$$f = max(2x_1 + x_2 - x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Сложность задачи S(3) = 20.

№ 9. Решить с помощью симплекс-таблиц**.**

$$f = max(x_1 - x_2 - 2x_4)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 2 \\ x_1 - x_4 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$$

Сложность задачи S(3) = 20.

№ 10. Решить с помощью симплекс-таблиц**.**

$$f = min(x_2 + 2x_3 - x_4)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_4 \geq -1 \\ x_1 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 \geq 1 \end{cases}$$

Сложность задачи S(3) = 20.

№ 11. Решить с помощью симплекс-таблиц**.**

$$f = max(x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 4 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$$

Сложность задачи S(3) = 20.

№ 12. Решить с помощью симплекс-таблиц.

$$f = min(x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 1 \\ -x_1 - x_4 \le 5 \\ x_2 + x_3 \le 10 \end{cases}$$

Сложность задачи S(3) = 20.

Блок задач 4

№ 1. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = min(2 + x_1 - x_2 + 2x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 + x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 3 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

№ 2. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = max(3 + 2x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \ge -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 5 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

№ 3. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = max(2 + 2x_2 - x_3 + 3x_4)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_4 \ge -1 \\ x_1 + x_3 + x_4 \ge 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 \ge 1 \\ x_3 \le 4; \quad x_2 \le 10 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

№ 4. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = min(-4 - 2x_1 - x_2 - x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \ge -10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \ge -6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 10 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

№ 5. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = min(-x_2 - 2x_3 + x_4)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 2 \\ x_2 - 2x_3 \le -1 \\ 4x_3 - x_4 \le 3 \\ 5x_1 + x_4 \ge 6 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

№ 6. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = max(x_1 - 10x_2 + 100x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + 2x_3 \le 0 \\ x_1 + 2x_3 \le 5 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

№ 7. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = min(x_3 + 3x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \ge 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \ge -3 \\ x_1 \ge 1 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

№ 8. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = max(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_3 \le 2 \\ x_2 + x_3 \le 2 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

№ 9. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = min(2x_1 - x_2 + x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \le 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \ge 3 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

№ 10. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = max(x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 \le 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 1 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 \le 2 \\ -2x_2 + x_4 \le 0 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

№ 11. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = min(x_1 + x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

№ 12. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета Ms Excel ($\forall j, \quad x_j \ge 0$).

$$f = min(2 + x_1 + 3x_3 - x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \le 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2 \end{cases}$$

Сложность задачи S(4) = 35.

Блок задач 5

№ 1. Привести исходную задачу 1 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

№ 2. Привести исходную задачу 2 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

№ 3. Привести исходную задачу 3 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

№ 4. Привести исходную задачу 4 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

№ 5. Привести исходную задачу 5 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

№ 6. Привести исходную задачу 6 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

№ 7. Привести исходную задачу 7 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

№ 8. Привести исходную задачу 8 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

№ 9. Привести исходную задачу 9 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

№ 10. Привести исходную задачу 10 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

№ 11. Привести исходную задачу 11 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

№ 12. Привести исходную задачу 12 из Блока 4 к каноническому виду и построить задачу, двойственную к этой задачи. Сложность S(5) = 7.

Блок задач повышенной сложности

Найти решение с помощью симплекс- таблиц, дать их содержательную интерпретацию.

№ 1. Для изготовления трех видов продукции предприятие использует три разновидности ресурсов $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ и $\mathbf{R_3}$, запасы которых составляют 180; 120 и 220 единиц соответственно. Нормы расхода ресурса $\mathbf{R_1}$ на единицу продукции первого вида составляют 9 единиц, на единицу продукции второго вида 9 единиц, на единицу продукции третьего вида 2 единицы. Соответствующие нормы для ресурса $\mathbf{R_2}$ составляют 4 единицы, 3 единицы и 2 единицы, а для ресурса $\mathbf{R_3}$ 1 единицу, 2 единицы и 4 единицы. Цена первого вида продукции равна 7 д. е., второго вида 8 д. е., третьего вида 6 д. е. Найти план производства, при котором достигается наибольшая стоимость произведенного продуктового набора.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(0) = 55.

№ 2. Предприятие производит четыре вида продукции, используя для этого трудовые ресурсы, лимит которых не может превышать 4800 человеко-часов; полуфабрикаты, запас которых составляет 2400 кг и станочное оборудование, фонд рабочего времени которого равен 1500 часов. Для изготовления единицы продукции первого вида требуется 4 человеко-часа рабочего времени, 2 кг полуфабрикатов и 1 час работы станочного оборудования. Для изготовления единицы продукции второго вида требуется 2 человеко-часа рабочего времени, 10 кг полуфабрикатов, а станочное оборудование не используется. Для изготовления единицы продукции третьего вида требуется 2 человеко-часа рабочего времени, 6 кг полуфабрикатов и 2 часа работы станочного оборудования. Для изготовления единицы продукции четвертого вида требуется 8 человеко-часов рабочего времени и 1 час работы станочного оборудования, а полуфабрикаты не используются. Прибыль предприятия от реализации единицы продукции первого вида составляет 65 д.е., единицы продукции второго вида 70 д. е., единицы продукции третьего вида 60 д. е., единицы продукции четвертого вида 120 д. е. Найти план производства, обеспечивающий максимальную прибыль предприятию.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(0) = 45.

№ 3**.** Для извлечения из руды двух ценных веществ **А** и **В** могут быть задействованы три технологических процесса. В первом процессе из тонны руды можно получить 0,4 кг вещества **А** и 0,6 кг вещества **В**; во втором процессе 0,6 кг вещества **А** и 0,4 кг вещества **В**; в третьем процессе 0,2 кг вещества **А** и 0,2 кг вещества **В**. Стоимость переработки одной тонны руды при реализации первого процесса составляет 5 млн. руб., при реализации второго процесса 6 млн. руб., при реализации третьего процесса 1 млн. руб. Необходимо получить из 10 тонн руды, направляемой на переработку, не менее 3 кг каждого вещества. Спланировать распределение руды между процессами так, чтобы минимизировать затраты на её переработку.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(0) = 55.

№ 4. Магазин оптовой торговли реализует три вида товаров, используя в процессе работы торговые залы, площадь которых составляет 450 кв. м и рабочее время служащих, лимит которого не должен превышать 600 человеко-часов. Для предпродажной подготовки и реализации единицы первого вида товара необходимо 1,5 кв. м площади торговых помещений и 3 человеко-часа рабочего времени; для второго вида товара 2 кв. м и 2 человеко-часа рабочего времени; для третьего вида товара 3 кв.м и 1,5 человеко-часа рабочего времени. Прибыль, получаемая магазином от реализации единицы первого вида товара, составляет 50 д. е., от реализации единицы второго вида товара 65 д. е., от реализации единицы третьего вида товара 70 д. е. Требуется сформировать план продаж, максимизирующий прибыль магазина, при условии, что общий товарооборот не должен быть меньше 240 тысяч д. е.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(0) = 55.

№ 5. Сложное химическое производство включает в себя три технологических процесса. В первом и во втором процессах в качестве основного сырья используются вещества **A** и **B.** В первом процессе в количествах 2 и 1 единицы, а во втором процессе в количествах 2 и 4 единицы. В первом процессе в качестве побочного продукта образуется вещество **C** в количестве 1 единицы, которое используется как сырье во втором процессе в количестве 2 единиц. В первом процессе используется как сырье ещё вещество **D** в количестве 4 единиц, которое является отходом во втором процессе в количестве 1 единицы. Третий процесс предназначен для регенерации веществ **A B** и **C** из вещества **D**, причем из 1 единицы вещества **D** в этом процессе удается получить по 1 единице веществ **A B** и **C**. Суточный доход, приносимый продукцией первого процесса, составляет 7 млн. руб., второго процесса 3 млн. руб., третьего процесса 2 млн. руб. Требуется спланировать работу производства так, чтобы достичь наибольшей величины суточного дохода, если начальные запасы вещества **A** равны 8 единиц, вещества **B** 4 единицы, вещества **C** 1 единицу, вещества **D** 8 единиц.

Сложность (трудоемкость) проблемы S(0) = 55.

Раздел 2. Транспортная задача

В наш век, когда глобализация всех сфер человеческой деятельности стала свершившимся фактом, когда газ сибирских месторождений используется в Германии и Бельгии, когда internet стал неотъемлемой частью повседневной жизни практически всего населения планеты, чрезвычайную важность приобретает проблема перемещения материи, энергии и информации как в реальном, так и в виртуальном пространстве. Эта проблема порождает широкий класс задач, которые получили названия задач управления потоками. Общий объем ресурсов, задействованных в них, огромен. Они не прерываются ни на мгновение и любой, даже незначительный, сбой режима нормального функционирования может стать причиной экономических потерь и социальной напряженности. Таким образом, актуальность и востребованность задач отыскания оптимального, в некотором смысле, управления потоками несомненна.

В зависимости от конкретных физических и технических особенностей потоков и содержательного смысла задач могут быть сформулированы различные критерии эффективности управления. Например: 1. Найти максимально возможное количество субстанции (газа, нефти и т.п.), которое может быть доставлено по системе трубопроводов от пункта добычи до потребителя. 2. НА разветвленной сети дорог найти маршрут движения между двумя пунктами минимизирующий время пребывания в пути. 3. Организовать доставку грузов от пунктов их сосредоточения (складов, баз и т.п.) до потребителя так, чтобы минимизировать расходы на транспортировку. Разумеется, все перечисленные постановки являются рамочными и, в зависимости от особенностей моделируемой ситуации, они могут быть уточнены и дополнены.

Ситуация, описанная в третьем варианте постановки, носит название транспортной задачи. Эта постановка очень популярна и широко используется на практике для отыскания наиболее экономических схем грузоперевозки. В математическом аспекте транспортная задача (как будет показано ниже), является типичной задачей линейного программирования, а значит для ее решения может быть использован симплекс-метод, подробное описание и обоснование которого приведено в разделе 1. Однако, некоторые особенности этих задач позволяют выделить их в особый класс, который в курсе «Исследования операций» традиционно рассматривается отдельно от классических задач линейного программирования.

Во-первых, транспортная задача всегда имеет решение. Иначе говоря, целевая функция транспортной задачи не может быть неограниченной на множестве ее допустимых планов, а ее ограничения ни при каких обстоятельствах не могут оказаться противоречивыми. Во-вторых, в построении и обосновании алгоритма решения транспортной задачи существенную роль играют результаты теории двойственности (см. п. 1.8 настоящего приложения). В-третьих, структура транспортной задачи позволяет указать очень простую, эффективную и легко визуализируемую разновидность симплекс-метода, использование которого вносит в процесс решения транспортной задача элементы игры.

2.1. Пример транспортной задачи

Многие классы широко распространенных на практике проблем при формализации приводят к задачам линейного программирования, имеющим особенности (особые задачи линейного программирования). К таким классам задач относятся, в частности, транспортная задача, распределительные задачи. Имеющиеся особенности в этих задачах позволяют сконструировать более простой алгоритм, чем универсальный симплекс – метод и применить принципиально новый конструкт (алгоритм) при поиске их решения. Рассмотрим операцию формализации проблемы, т.е. преобразования проблемы и сведение ее к особой задаче линейного программирования на следующем примере.

Проблема. Пусть имеются два склада $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$, где сосредоточен однородный груз. На складе $\mathbf{A_1}$ его количество a_1 = 170 т., а на складе $\mathbf{A_2}$ его количество a_2 = 130 т. Этот груз должен быть доставлен трем потребителям $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$ и $\mathbf{B_3}$. Потребитель $\mathbf{B_1}$ может принять груз в количестве b_1 = 105 т.; потребитель $\mathbf{B_2}$ в количестве b_2 = 75 т.; потребитель $\mathbf{B_3}$ в количестве b_3 = 120 т. Тарифы на перевозку груза между любым складом и любым потребителем, выраженные в каких-либо денежных единицах, известны. Их принято обозначать буквами c_{ij}, где i – порядковый номер склада, а j – порядковый номер потребителя. В рассматриваемом примере таких чисел 6: $c_{11} = 4$; $c_{12} = 3$; $c_{13} = 3$; $c_{21} = 6$; $c_{22} = 2$; $c_{23} = 4$. Для удобства восприятия обычно эти данные представляют в виде таблицы

потребители / **склады**	**105**	**75**	**120**
170	4	3	3
130	6	2	4

Цель: сформировать план доставки грузов от складов до потребителей так, чтобы общая величина транспортных издержек была наименьшей и при этом весь запас грузов, имеющихся на складах, должен быть вывезен полностью, а спрос всех потребителей должен быть полностью удовлетворен.

Комментарий. В проблеме предполагается равенство общего количества грузов на складах совокупному спросу потребителей.

Формализация. Обозначим символом x_{ij} количество груза, запланированного к перевозке от i – ого склада к j – ому потребителю. Тогда цель, т.е. требование минимизации транспортных издержек может быть сформулировано математически как условие минимизации суммы всех возможных произведений грузопотоков по всем маршрутам на соответствующие тарифы, т.е. **min** $(4x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 6x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23})$, или в более компактной форме записи **min**

$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$. Условие обязательного освобождения складов и полного удовлетворения потребительского спроса математически оформляется ограничениями в виде равенств, число которых равно общему количеству складов и потребителей.

Условие освобождения 1 – ого склада $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 170$

Условие освобождения 2 – ого склада $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 130$

Условие удовлетворения 1 – ого потребителя $x_{11} + x_{21} = 105$.

Условие удовлетворения 2 – ого потребителя $x_{12} + x_{22} = 75$

Условие удовлетворения 3 – его потребителя $x_{13} + x_{23} =120$

Итак, в результате формализации проблемы приходим к ее математической модели или к так называемой транспортной задаче:

Определить min $(4x_{11} + 3x_{12} + 3_{13} + 6_{21} + 2x_{22} + 4x_{23})$ при условиях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 170 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 130 \\ x_{11} + x_{21} = 105 \\ x_{21} + x_{22} = 75 \\ x_{13} + x_{23} = 120 \end{cases}$$

Эта задача является типичной задачей линейного программирования с особенностью. Особенностью этой задачи является то, что все коэффициенты в условиях равны единице – это позволяет решать задачу простыми способами.

Решением этой задачи (оптимальным планом перевозок) является набор значений x_{11} , x_{12} , x_{13} , x_{21} , x_{22} , x_{23} при которых достигается цель.

2.2. Инструкция к организации учебной работы (раздел 2)

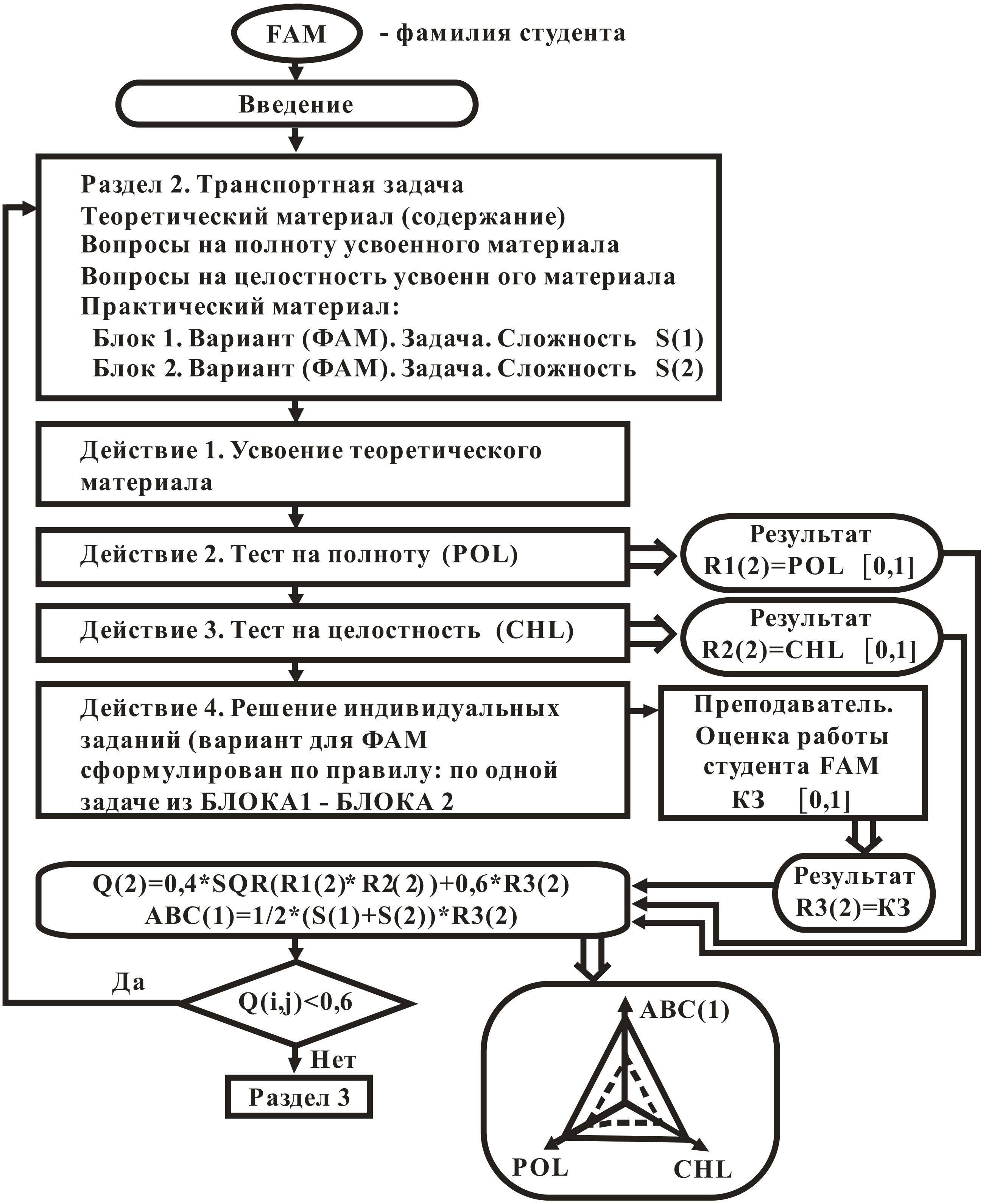


Рис. 2.1. Схема организации подготовки

2.3. Постановка транспортной задачи

Рассмотрим классическую постановку транспортной задачи по критерию минимизации общих транспортных издержек. Пусть имеется m пунктов, где аккумулирован однородный груз, в дальнейшем будем именовать их «склады» и n пунктов, куда этот груз должен быть доставлен, в дальнейшем будем именовать и «потребители». Предполагается известным: количество груза $a_i \left(i = \overline{1,m}\right)$, содержащееся на каждом складе; количество груза $b_j \left(j = \overline{1,n}\right)$, которое может принять каждый потребитель; стоимость доставки единицы груза от i – ого склада до j – ого потребителя c_{ij}, т.е. тариф. Множество чисел c_{ij} $i = \overline{1,m};$ $j = \overline{1,n}$ образуют матрицу $C = (C_{ij})_{min}$, называемую <u>матрицей тарифов</u>. Будем считать, что:

1. Технически осуществляемой является перевозка между любым складом и любым потребителем; 2. Перевозки осуществляются только со складов к потребителям, отсутствует как обратный грузопоток, так и обмен грузами между складами и потребителями. В рамках сделанных обозначений и замечаний может быть поставлена экстремальная задача: сформировать план грузоперевозок, минимизирующий суммарные транспортные издержки и обеспечивающий полное удовлетворение заявок всех потребителей и вывоз всего запаса грузов, имеющихся на складах.

Сформулируем математическую модель и осуществим формальную постановку задачи. Обозначим x_{ij} количество груза, планируемое к перевозке с i – ого склада j – ому потребителю. Всё множество этих чисел образует матрицу $\mathrm{X} = (x_{ij})_{min}$, которая носит название матрицы перевозок. Тогда требование минимизации суммарных транспортных издержек может быть записано в виде целевой функции $W = min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$. Требование полного удовлетворения спроса потребителей порождает ограничения вида $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \; j = \overline{1,n};$ требования полного исчерпания запасов грузов на складах порождает ограничения вида $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \; i = \overline{1,m};$ предположение об отсутствии встречных перевозок порождает ограничения неотрицательности $x_{ij} \geq 0$. Сформулированная модель ситуации представляет собой типичную задачу линейного программирования, в состав которой входят $m \times n$ переменных и $m+n$ ограничений в виде равенств. Поскольку сумма элементов матрицы перевозок не зависит от порядка суммирования, т.е. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, то $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$, что означает равенство запасов грузов на всех складах и совокупного спроса потребителей. Это фактически является необходимым условием существования допустимого плана перевозок и определяет транспортную задачу закрытого типа. Однако, в реальных задачах подобное встречается достаточно редко, и обычно $\sum_{j=1}^{n} b_j \neq \sum_{i=1}^{m} a_i$, что определяет принадлежность транспортной задачи к открытому типу. Но, поскольку в этом случае невозможно построение допустимого плана перевозок, необходимо указать алгоритм приведения транспортной задачи открытого типа к закрытому. Пусть, для определенности, $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. запасы грузов на складах превышают величину суммарного спроса. В этом случае добавляется фиктивный потребитель, спрос которого полагается равным $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, но, т.к. реальных перевозок к этому потребителю нет, тарифы на транспортировку грузов до этого потребителя полагаются нулевыми.

Т.е. $c_{i,n+1} = 0 \ i = \overline{1,m}.$, а в матрицу тарифов добавляется нулевой столбец. Фактически это означает, что часть грузов останется на складах. Если же $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$ добавляется фиктивный склад и дополнительная нулевая строка в матрицу тарифов. В этом случае, разумеется, спрос одного или нескольких потребителей не будет полностью удовлетворен за счет грузов данных складов.

Как известно из теории линейного программирования, число базисных элементов опорного плана ЗЛП равно числу линейно независимых столбцов (строк) технологической матрицы задачи, или её рангу. Выясним, чему равен ранг технологической матрицы транспортной задачи.

<u>*Теорема.*</u> Ранг технологической матрицы транспортной задачи на единицу меньше числа ограничений. Технологическая матрица транспортной задачи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что если сложить первые m строк этой матрицы, получится строка, все элементы которой будут равны единице. Такой же результат будет получен при сложении последних n строк. Обозначив i –ую строку матрицы s_i получим

$s_1 + s_2 + \ldots.. + s_m = s_{m+1} + s_{m+2} \ldots.. + s_n$

Отсюда следует, что любая строка может быть представлена линейной комбинацией остальных строк матрицы, а это значит, что число линейно независимых строк технологической матрицы транспортной задачи равно $m + n - 1$.

Полученный результат позволяет сделать важное практическое заключение: поскольку переменные транспортной задачи имеют смысл объемов грузоперевозок от складов к потребителям, из всего количества $m \times n$ возможных маршрутов в опорном плане транспортной задачи ненулевые грузопотоки могут быть не более чем на $m + n - 1$ маршруте.

2.4. Построение начального опорного плана

Решение транспортной задачи, как и любой задачи линейного программирования, включает в себя построение начального опорного плана и его последовательное улучшение. Особенности структуры транспортной задачи позволяют указать специфическую разновидность симплекс – метода, весьма эффективную именно для этих задач. Существует несколько способов отыскания начального опорного плана. Наиболее известными и часто применяемыми для практического решения задач являются метод <u>северо-западного угла</u> <u>и</u> метод <u>минимального элемента</u>.

В методе северо-западного угла в матрице тарифов берется элемент из левого верхнего (северо-западного) угла и по маршруту, соответствующему этому элементу, планируется к перевозке максимально возможное количество груза. При этом оказывается, что либо исчерпываются запасы груза на складе, либо полностью удовлетворяется спрос потребителя. Из оставшихся элементов матрицы тарифов вновь выбирают «северо-западный» и по соответствующему ему маршруту планируют к перевозке максимально возможное количество оставшихся грузов. Процесс распределения заканчивается, когда все запасы грузов на складах исчерпаны, а заявки всех потребителей удовлетворены. Результатом реализованной процедуры является план перевозок, в котором задействованы $m + n - 1$ маршрутов. Метод минимального элемента отличается от метода северо-западного угла тем, что в матрице тарифов выбирается минимальный элемент, соответствующий самому выгодному тарифу, и по соответствующему маршруту планируется к перевозке максимально возможное количество грузов. При этом, как и в методе северо-западного угла, либо запасы грузов на соответствующем складе оказываются исчерпанными, либо спрос какого-то потребителя полностью удовлетворяется. Далее из оставшихся элементов матрицы тарифов вновь выбирается минимальный и т. д. вплоть до полного исчерпания запасов на всех складах. Полученный таким способом план перевозок так же будет иметь в своем составе $m+n-1$ задействованных маршрутов.

Замечание. В процессе построения начального опорного плана возможно одновременное исчерпание запасов, на каком - либо складе и удовлетворение спроса какого- либо потребителя. В этом случае число ненулевых элементов в опорном плане (задействованных маршрутов) оказывается меньшим чем $m+n-1$. Такие задачи называются выроженными. Недостающее до $m+n-1$ количество маршрутов дополняется из незагруженных маршрутов с минимальными тарифами. Их полагают условно загруженными с грузопотоком равным нулю.

Пример 7. Составить план перевозок зерна из районов A_1, A_2, A_3, A_4, запасы, которых составляют соответственно 80, 70, 100 и 50 тыс.т. На три элеватора B_1, B_2 и B_3 мощностью 100, 110 и 90 тыс.т. Затраты на перевозку 1т. зерна по соответствующим маршрутам выражены в денежных единицах и приведены в матрице тарифов

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Представим условия задачи в таблицу (рис. 2.2), каждая клетка, которой соответствует некоторому маршруту, и перенесем в эти клетки элементы матрицы тарифов. Число клеток равно числу переменных транспортной задачи. В рассматриваемом случае $m \times n = 12$.

Районы	Элеваторы			Запасы районов a_i тыс.т.
	B_1	B_2	B_3	
A_1	3 80	5 x	6 x	80
A_2	7 x	2 70	4 x	70
A_3	4 20	3 40	5 40	100
A_4	6 x	4 x	7 50	50
Мощность элеваторов b_j тыс.т.	100	110	90	300 300

Рис. 2.2. Условие задачи

Поскольку запасы зерна в районах равны общей мощности элеваторов, т.е. $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$, данная задача, относится к закрытому типу и введения фиктивных элементов в условие не требуется. Найдем начальный план перевозок методом минимального элемента. Минимальный элемент в матрице тарифов $C_{22} = 2$ соответствует маршруту между районом A_2 и элеватором B_2. Максимальное количество груза, которое может быть перевезено на этом маршруте равно 70 тыс.т. и лимитируется запасами зерна в районе A_2. Таким образом, полагаем, x_{22} = 70. Записываем это число в соответствующую клетку таблицы 4а. Поскольку весь запас зерна из района A_2 вывозится на элеватор B_2, грузоперевозки между районом A_2 и другими элеваторами не осуществляются. Отметим этот факт, «закрыв» крестиками остальные клетки таблицы 4а во второй строке, исключив, тем самым маршруты от района A_2 до всех элеваторов, кроме B_2, из дальнейшего рассмотрения. Из оставшихся элементов матрицы тарифов минимальными являются $C_{11}=3$ и $C_{32}=3$. Это позволяет запланировать к перевозке между районом A_1 и элеватором B_1 80 тыс.т., а между районом A_3 и элеватором B_2 40 тыс.т. зерна. Следовательно, x_{11} = 80; x_{32} = 40. Помещаем эти числа в соответствующие клетки таблицы 4а и выводим из дальнейшего рассмотрения все остальные клетки первой строки и второго столбца. Из оставшихся элементов матрицы тарифов, находящихся в незаполненных и не вычеркнутых клетках минимальный $C_{31}=4$. Устанавливаем план перевозок между районом A_3 и элеватором B_1 20 тыс.т., т.е. x_{31} = 20. Первый элеватор, таким образом, загружается полностью. По двум оставшимся маршрутам между третьим районом и элеватором B_3 и четвертым районом и элеватором B_3 направляем соответственно 40 тыс.т. и 50 тыс.т. груза. Это значит, что x_{33} = 40, а x_{43} = 50. Число ненулевых элементов матрицы перевозок равно 6. А т.к. для данной задачи $m+n-1$=3+4–1=6 начальный опорный план найден и представлен на рис. 2.2. Значение целевой функции на этом плане, т.е. стоимость грузоперевозок составляет W^0 = 1130 ден.ед. Легко подсчитать, что стоимость начального плана перевозок, полученного методом северо-западного угла составляет 1210 ден.ед.

Для того чтобы выяснить будет ли полученный опорный план оптимальным необходимо сформулировать критерий оптимальности.

__*Теорема.*__ Если опорный план транспортной задачи $X^*=(x_{ij}^*)_{mxn}$ оптимален, то существует $m+n$ чисел $u_i^*\ i=\overline{1,m};\ \vartheta_j^*\ \ j=\overline{1,n},$ таких, что $u_i^*+\vartheta_j^*=c_{ij}$ для $\forall x_{ij}^*>0$ и $u_i^*+\vartheta_j^*\le c_{ij}$ для $\forall x_{ij}^*=0$. Числа $\{u_i^*\}$ и $\{\vartheta_j^*\}$ называются <u>потенциалами</u> складов и потребителей соответственно. Пусть имеется транспортная задача

$$W=\min\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij};\quad \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\ \ j=\overline{1,n};\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ \ i=\overline{1,m}\quad x_{ij}\ge 0.$$

Двойственная ЗЛП по отношению к ней будет иметь в своём составе $n+m$ переменных и $n\times m$ ограничений в виде неравенств. В соответствии с общими правилами построения ЗЛП она может быть записана в виде:

$$F = max\left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \vartheta_j\right) \quad u_i + \vartheta_j \le c_{ij} \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

Если $\mathrm{X}^* = (x_{ij}^*)_{mxn}$ оптимальный план транспортной задачи, а $\mathrm{Y}^* = (u_i^*, \vartheta_j^*)$ оптимальный план ЗЛП двойственной к ней, то в соответствии с теоремой о дополняющей нежесткости, $u_i^* + \vartheta_j^* = c_{ij}$ для $\forall\, x_{ij}^* > 0$ и $u_i^* + \vartheta_j^* \le c_{ij}$ для $\forall\, x_{ij}^* = 0$. Отсюда следует: 1. Каждой загруженной клетке (задействованному маршруту) соответствует сумма потенциалов равная тарифу этого маршрута; 2. Каждой свободной клетке (незадействованному маршруту) в оптимальном плане перевозок соответствует сумма потенциалов, не превышающая тарифа этого маршрута. Это является критерием оптимальности плана перевозок транспортной задачи и позволяет указать алгоритм его построения.

2.5. Метод потенциалов

В соответствии с доказанной теоремой, транспортной задаче, матрица тарифов которой имеет размерность $m \times n$, соответствует набор потенциалов в количестве $m + n$, определяемых посредством системы $m + n - 1$, уравнений вида $u_i + \vartheta_j = c_{ij}$. Т.к. система недоопределенная, одному из потенциалов придается произвольное числовое значение, что позволяет однозначно вычислить остальные потенциалы. Для выяснения оптимальности плана перевозок по каждому незадействованному маршруту проверяется, выполнение условия $u_i + \vartheta_j \le c_{ij}$. Согласно теореме о потенциалах оно гарантирует оптимальность плана. Если для каких либо маршрутов это условие не выполняется, то план перевозок не оптимален и его можно улучшить (уменьшить общие расходы по перевозкам) за счет перераспределения части грузопотока на эти маршруты.

Рассмотрим технические аспекты перехода от начального опорного плана транспортной задачи к новому, более выгодному. В начальном плане перевозок просматриваются все незадействованные маршруты (в таблице транспортной задачи им соответствуют свободные клетки) и среди них отыскиваются такие, для которых нарушены условия критерия оптимальности. Из них выбирается тот, где нарушение наиболее значительно, т.е. величина $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + \vartheta_j)$ минимальна. Для этой клетки строится замкнутый цикл, остальные вершины которого находятся в загруженных клетках. Цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, состоящую из звеньев, пересекающихся под прямым углом, и соединяющих две клетки одной и той же строки (столбца). В силу построения, в цикле всегда четное число клеток, из которых только одна свободная. Вершинам (клеткам) цикла условно присваиваются знаки: свободной клетке, из которой начинается обход, – плюс, следующей по ходу – минус, следующей – снова плюс и т.д. Поскольку число клеток в цикле чётно, направление обхода значения не имеет. Из «отрицательных» клеток цикла выбирается та, в которой грузопоток минимален, и это количество груза перемещается по циклу, добавляясь к грузопотокам в «положительных» клетках и вычитаясь в «отрицательных». Т.к. каждое звено цикла соединяет клетки одной строки (склада), или одного столбца (потребителя), баланс цикла не нарушается, а, следовательно, не нарушаются и ограничения задачи. В результате выполненной процедуры свободная клетка оказывается загруженной, а одна из ранее загруженных – свободной. Транспортные издержки при этом снижаются на величину равную произведению количества груза, перемещенного в свободную клетку, на разность тарифов освободившейся клетки и вновь загруженной. Новый план перевозок в том же порядке проверяется на оптимальность и, в случае его не оптимальности, строятся новые циклы перераспределения грузов. Решение считается законченным, когда критерий оптимальности, сформулированный в теореме о потенциалах, оказывается выполнен для всех пустых клеток таблицы транспортной задачи.

Пример 7 (продолжение). Вычислим потенциалы складов и потребителей для плана перевозок, представленного в таблице 4а. Воспользуемся тем, что один из потенциалов выбирается, произвольно и положим потенциал третьего склада $u_3 = 0$. Тогда, из условия равенства суммы потенциалов величине тарифа для всех загруженных клеток, получим $\vartheta_1 = 4; \vartheta_2 = 3; \vartheta_3 = 5.$ И $u_1 = -1; u_2 = -1; u_4 = 2.$ Проверим выполнение критерия оптимальности для свободных клеток. Для клетки:

– A_1B_2 $u_1 + \vartheta_2 = -1 + 3 + 2; c_{12} = 5,$ т.е. $u_1 + \vartheta_2 < c_{12}$, а значит условие оптимальности выполнено.

– A_1B_3 $u_1 + \vartheta_3 = -1 + 5 = 4; c_{13} = 6,$ т.е. $u_1 + \vartheta_3 < c_{13}$.

– A_2B_1 $u_2 + \vartheta_1 = -1 + 4 = 3; c_{21} = 7,$ т.е. $u_2 + \vartheta_1 < c_{21}$.

– A_2B_3 $u_2 + \vartheta_3 = -1 + 5 = 4; c_{23} = 4,$ т.е. $u_2 + \vartheta_3 = c_{23}$ условие оптимальности выполнено в форме равенства.

– A_4B_1 $u_4 + \vartheta_1 = 2 + 4 = 6; c_{41} = 6,$ т.е. $u_4 + \vartheta_1 = c_{41}$.

– A_4B_2 $u_4 + \vartheta_2 = 2 + 3 = 5; c_{42} = 4,$ т.е. $u_4 + \vartheta_2 > c_{42}$ условие оптимальности нарушено, поэтому перераспределение части грузопотока на маршрут между районом A_4 и элеватором B_2 имеет смысл и приведет к снижению транспортных издержек. Для реализации процедуры перераспределения строим цикл для клетки $A_4 B_2$. В него кроме клетки $A_4 B_2$ войдут загруженные клетки табл. 4а $A_3 B_2$; $A_3 B_3$; $A_4 B_3$. Из «отрицательных» клеток $A_3 B_2$ и $A_4 B_3$ перемещаем в ''положительные'' клетки $A_4 B_2$ и $A_3 B_3$ по 40 ед. груза. В таблице (рис.2.3) приведен новый план перевозок.

Районы	Элеваторы	Запасы

	B_1	B_2	B_3	районов a_i тыс.т.
A_1	3 80	5 х	6 х	80
A_2	7 х	2 70	4 х	70
A_3	4 20	3 х	5 80	100
A_4	6 х	4 40	7 10	50
Мощность элеваторов b_j тыс.т.	100	110	90	300 300

Рис. 2.3. План перевозок

Он не нарушает ограничений транспортной задачи и снижает по сравнению с исходным планом перевозок транспортные издержки на 40 ден.ед. Действительно:

W^1=3×80+2×70+4×20+5×80+4×40+7×10=1090 ден.ед.

Вновь вычисляем потенциалы складов и потребителей для вновь полученного плана перевозок. Полагая $u_3 = 0$, получим $\vartheta_1 = 4$ и $\vartheta_3 = 5$. И далее $u_1 = -1; u_4 = 2; \vartheta_2 = 2; u_2 = 0$. Проверяем выполнение критерия оптимальности для свободных клеток. Клетка A_1B_2 $u_1 + \vartheta_2 = -1 + 2 = 1$; клетка A_1B_3 $u_1 + \vartheta_3 = -1 + 5 = 4$; клетка A_2B_1 $u_2 + \vartheta_1 = 0 + 4 = 4$; клетка A_2B_3 $u_2 + \vartheta_3 = 0 + 5 = 5$; клетка A_3B_2 $u_3 + \vartheta_2 = 0 + 2 = 2$. Клетка $A_4B_1 u_4 + \vartheta_1 = 2 + 4 = 6$. В новом плане критерий оптимальности не удовлетворяется для клетки A_2B_3, т.к. $u_2 + \vartheta_3 > c_{23}$. Строим цикл для клетки A_2B_3 в табл. 4b и осуществляем перераспределение грузопотока на свободный маршрут между районом A_2 и элеватором B_3. Кроме клетки A_2B_3 в состав этого цикла войдут клетки $A_2B_2; A_4B_2; A_4B_3$. Из «отрицательных» клеток A_2B_2 и A_4B_3 перемещаем в ’’положительные’’ клетки A_2B_3 и A_4B_2 по 10 единиц груза. В таблице (рис. 2.4) приведен план перевозок, полученный после этой модернизации. По сравнению с планом таблицы (рис. 2.3) транспортные издержки снижены ещё на 10 ден. ед.

Районы	Элеваторы			Запасы районов a_i тыс.т.
	B_1	B_2	B_3	
A_1	3 80	5 x	6 x	80
A_2	7 x	2 60	4 10	70
A_3	4 20	3 x	5 80	100
A_4	6 x	4 50	7 x	50
Мощность элеваторов b_j тыс.т.	100	110	90	300 300

Рис. 2.4. План перевозок

$W^2 = 3\times80 + 2\times60 + 4\times10 + 4\times20 + 5\times80 + 4\times50 = 1080.$

Полагая для нового плана $u_3 = 0$, получаем $\vartheta_1 = 4; \vartheta_3 = 5; u_1 = -1; u_2 = -1; \vartheta_2 = 3; u_4 = 1.$

Проверяя условие оптимальности для свободных клеток Таблицы 4с, получим

$u_1 + \vartheta_2 = 2 < 5 = c_{12}; u_1 + \vartheta_3 = 4 < 6 = c_{13}; u_2 + \vartheta_1 = 3 < 7 = c_{21};$

$u_3 + \vartheta_2 = 3 = 3 = c_{32}; u_4 + \vartheta_1 = 5 < 6 = c_{41}; u_4 + \vartheta_3 = 6 < 7 = c_{43}.$

Для всех свободных клеток условие оптимальности выполняется, следовательно, план перевозок, представленный в таблице 4с оптимален, а величина транспортных расходов 1080 ден. ед. по доставке зерна из районов к элеваторам является минимально возможной.

Рассмотрим ещё один пример, где будет показана техника приведения транспортной задачи открытого типа к закрытому.

Пример 8. В трех хранилищах A_1, A_2 и A_3 имеется соответственно 70, 90 и 50 тонн топлива. Необходимо спланировать перевозку топлива четырем потребителям B_1, B_2, B_3 и B_4, спрос которых составляет соответственно 50, 70, 40 и 40 тонн так, чтобы транспортные расходы были бы минимальны. Затраты на перевозку 1 т. топлива по соответствующему маршруту, выраженные в ден. единицах приведены в матрице тарифов

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая суммарные запасы топлива в хранилищах и общий спрос потребителей замечаем, что $\sum_{i=1}^{3} a_i = 210 > \sum_{j=1}^{4} b_j = 200.$ Т.е. это транспортная задача открытого типа, и для её решения необходимо добавить фиктивного потребителя B_5, спрос которого установить равным b_5=210-200=10 т. Начальный план перевозок, найденный методом минимального элемента, представлен в таблице (рис. 2.5).

Хранилища	Потребители					Запасы в хранилищах a_i т.
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3 x	2 60	3 x	6 x	0 10	70
A_2	4 40	3 10	5 x	7 40	0 x	90
A_3	2 10	4 x	1 40	5 x	0 x	50
Потребность b_j т.	50	70	40	40	10	210 200+10

Рис. 2.5. Начальный план перевозок

Ввиду отсутствия оснований для мотивированного выбора, «лишние» 10 т. груза распределяются произвольно. Фактически, ситуация представленная в таблице (рис. 2.6), означает, что 10 т. топлива остаются в хранилище A_1. Количество ненулевых элементов плана перевозок равно 7, поэтому, полагая $u_2 = 0$, получим $\vartheta_1 = 4; \vartheta_2 = 3; \vartheta_4 = 7$, и далее $u_1 = -1; u_3 = -2; \vartheta_3 = 3; \vartheta_5 = 1$. Проверка на оптимальность позволяет выявить единственную свободную клетку A_2B_5, для которой условие критерия оптимальности не выполняется. Действительно, $u_2 + \vartheta_5 = 1 > c_{25} = 0$. Строим цикл из клеток $A_2B_5; A_1B_5; A_1B_2$ и A_2B_2 и переносим в «положительные» клетки по 10 т. груза из «отрицательных» клеток A_2B_2 и A_1B_5. В Таблице 5b представлен новый план перевозок. Он лучше исходного, поскольку

W^0=2×60+0×10+4×40+3×10+7×40+2×10+1×40=650,

Тогда как W^1=2×70+4×40+7×40+0×10+2×10+1×40=640.

Хранилища	Потребители					Запасы в хранилищах a_i т.
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5 х	2 70	3 х	6 х	0 х	70
A_2	4 40	3 0	5 х	7 40	0 10	90
A_3	2 10	4 х	1 40	5 х	0 х	50
Потребности b_j т.	50	70	40	40	10	210 200+10

Рис. 2.6. Новый план перевозок

Однако новый план перевозок является вырожденным, т.к. для заданной задачи $m + n - 1 = 7$, а число ненулевых элементов в составе плана перевозок таблицы (рис. 2.6) только 6. Для того, чтобы осуществить проверку этого плана на оптимальность и вычислить потенциалы складов и потребителей полагаем одну из свободных клеток, например клетку $A_2 B_2$, <u>условно загруженной</u> и имеющей грузопоток равный нулю. Это позволяет вычислить все потенциалы плана перевозок таблицы (рис 2.6) обычным порядком. Полагая $u_2 = 0$, находим $\vartheta_1 = 4; \vartheta_2 = 3; \vartheta_4 = 7; \vartheta_5 = 0; u_1 = -1; u_3 = -2; \vartheta_3 = 3.$ Для всех свободных клеток таблицы (рис 2.6) условие $u_i + \vartheta_j \le c_{ij}$ выполнено, следовательно найденный план перевозок имеет минимально возможную стоимость. Оказалось более целесообразным оставить избыточные 10 т. топлива не в первом хранилище, а во втором.

2.6. Решение транспортной задачи в среде MS Excel

Задача. Пусть производство продукции осуществляется на 4-х предприятиях A_1, A_2, A_3, A_4 а затем развозится в 5 пунктов потребления этой продукции B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. На предприятиях A_i (i = 1, 2, 3, 4) продукция находится соответственно в количествах a_i (условных единиц). В пункты B_j (j = 1, 2, 3, 4,5) требуется доставить b_j единиц продукции. Стоимость перевозки единицы груза (с учетом расстояний) из A_i в B_j определена матрицей $C = C_{ij}$.

Предприятия могут выпускать в день 235, 175, 185 и 175 единиц продукции. Пункты потребления готовы принимать ежедневно 125, 160, 60, 250 и 175 единиц продукции. Стоимость перевозки единицы продукции (в у. е.) с предприятий в пункты потребления приведена в таблице.

Предприятия	Потребители					Объемы производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3,2	3	2,35	4	3,65	235
A_2	3	2,85	2,5	3,9	3,55	175
A_3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4	185
A_4	4	2	2,1	4,1	3,4	175

Потреб-ности	125	160	60	250	175	

Требуется минимизировать суммарные транспортные расходы по перевозке продукции.

Необходимо выполнить следующее:

1. Установить, является ли модель транспортной задачи, заданная таблицей, сбалансированной.
2. Разработать математическую модель задачи.
3. Найти минимальную стоимость перевозок, используя надстройку «Поиск решения» в среде MS Excel.

Решение.

1. Выполним проверку сбалансированности математической модели задачи. Модель является сбалансированной, так как суммарный объем производимой продукции в день равен суммарному объему потребности в ней:

235+175+185+175=125+160+60+250+175

(При решении этой задачи не учитываются издержки, связанные со складированием и недопоставкой продукции).

2. Приступим к построению математической модели поставленной задачи. Неизвестными будем считать объемы перевозок.

Пусть x_{ij} – объем перевозок с i-го пункта поставки в j-й пункт потребления. Суммарные транспортные расходы – это функция $F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$, где c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции с i-го предприятия в j-й пункт потребления $(i = \overline{1,4};\ j = \overline{1,5})$.

Неизвестные в этой задаче должны удовлетворять следующим ограничениям:

– объемы перевозок не могут быть отрицательными, т.е. $x_{ij} \geq 0$;

– поскольку модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с предприятий, а потребности всех пунктов потребления должны быть полностью удовлетворены, т.е. $\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = b_j$ и $\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = a_i$.

Итак, имеем следующую задачу ЛП: найти минимум функции: $F = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} \to \min$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = b_j, \quad j \in [1, 5]$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = a_i, \quad i \in [1, 4]$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in [1, 4], \quad j \in [1, 5]$$

3. Приступаем к решению задачи на компьютере.

3.1. Откроем новый рабочий лист Excel.

3.2. В ячейки **B3:F6** стоимость перевозок единицы груза.

3.3. В ячейках **B16:F16** укажем формулы для расчета суммарной потребности продукции для *j*-го пункта, в ячейках **G12:G15** – формулы суммарного объема производства *i*-го предприятия.

3.4. В ячейки **B18:F18** заносим значения потребности продукции соответствующего пункта потребления, в ячейки **H12:H15** заносим значения объема производства соответствующего предприятия.

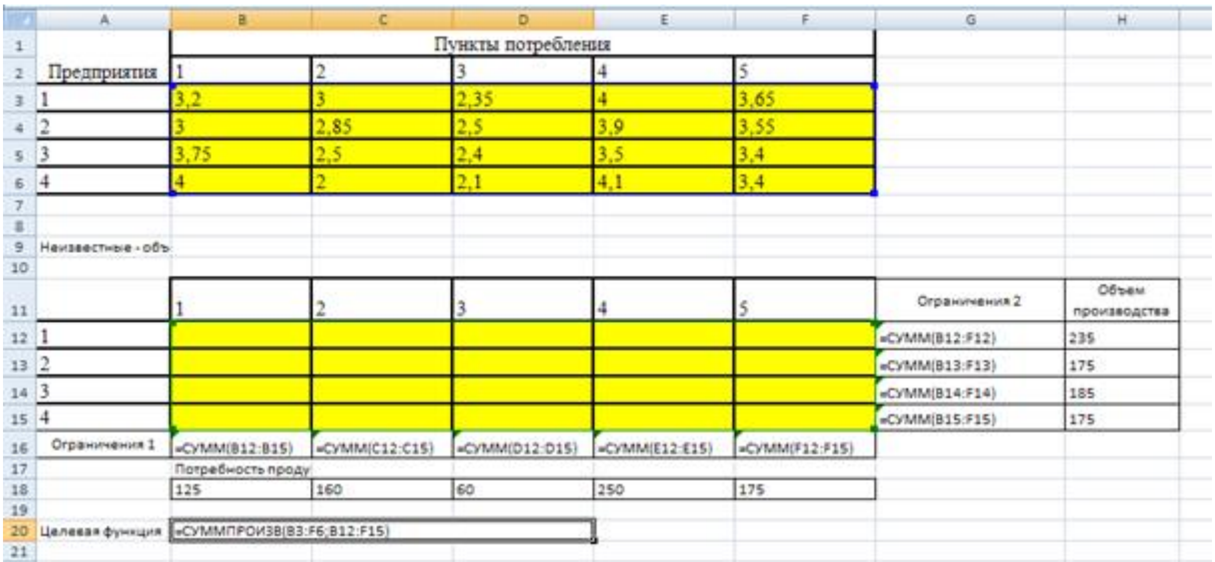
3.5. В ячейку **B20** занесем формулу целевой функции.

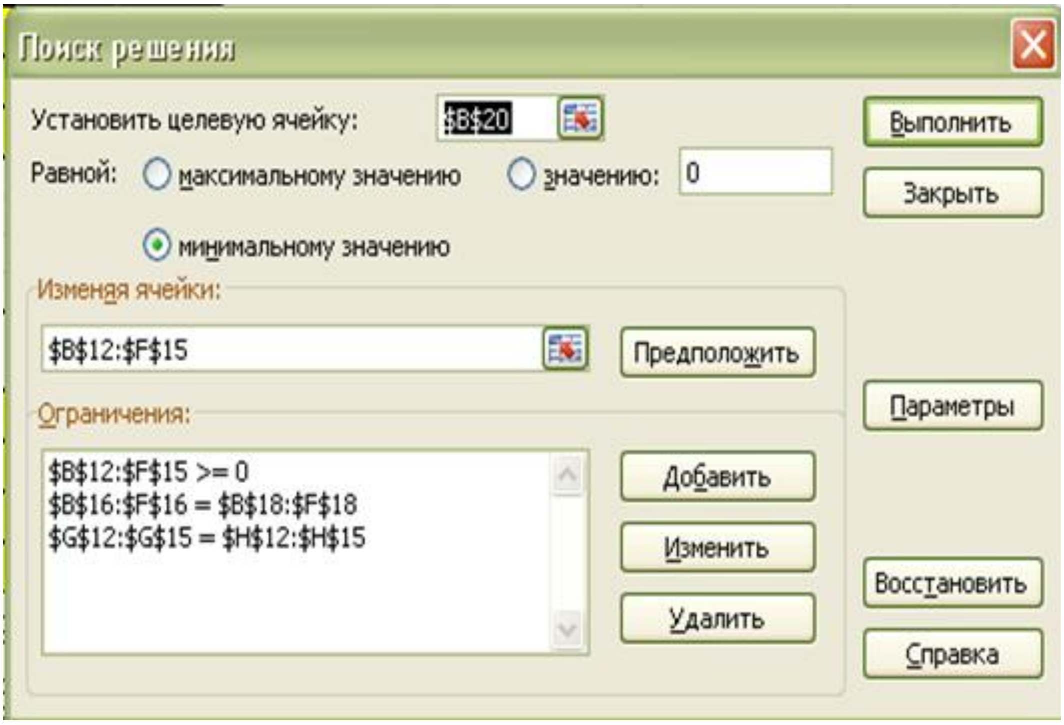
3.6. Выполним команду **Сервис → Поиск решения**. Откроется диалоговое окно **Поиск решения**. Если такой команды во вкладке **Сервис** нет, то следует подключить эту надстройку перейдя по **Сервис → Надстройки**, и поставив галочку напротив нужной, т.е. **Поиск решения**.

3.7. В поле **Установить целевую ячейку** указываем ячейку, содержащую оптимизируемое значение. Установим переключатель **Равный** в положение **минимальному значению**.

3.8. В поле **Изменяя ячейки** мышью зададим диапазон подбираемых параметров **$B$12:$F$15**.

3.9. В поле **Ограничения** введем необходимые ограничения и нажмем на кнопку **Добавить**, затем **Выполнить**.





В результате получится оптимальный набор переменных при данных ограничениях:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Пункты потребления						
2	Предприятия	1	2	3	4	5		
3	1	3,2	3	2,35	4	3,65		
4	2	3	2,85	2,5	3,9	3,55		
5	3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4		
6	4	4	2	2,1	4,1	3,4		
7								
8								
9	Неизвестные - объемы перевозок							
10								
11		1	2	3	4	5	Ограничения 2	Объем производства
12	1	0	0	60	65	110	235	235
13	2	125	0	0	0	50	175	175
14	3	0	0	0	185	0	185	185
15	4	0	160	0	0	15	175	175
16	Ограничения 1	125	160	60	250	175		
17		Потребность продукции						
18		125	160	60	250	175		
19								
20	Целевая функци			2373,5				
21								

Оптимальность решения можно проверить, экспериментируя со значениями ячеек **$B$12:$F$15.**

2.7. База вопросов для тестового контроля

Комментарий. Сложность (трудоемкость в минутах / работы) теста Т оценивается экспертом, т.е. устанавливается за сколько минут непрерывной работы эксперт способен ответить на все вопросы теста. Методика оценки следующая:

1. Оценивается трудоемкость ответа эксперта на один вопрос из теста, например, ему требуется 1 (мин/раб).

2. Тест, например, содержит 5 вопросов, случайным образом отобранных из базы вопросов, тогда S(T) = 5.

3. «Среднестатистическому» студенту для ответа, в целом, на тест требуется в 3 раза больше (мин/раб). Исходя из этого, на тест необходимо отпустить 15 (мин/раб).

Тест. Вопросы для оценки качества полноты (POL) усвоенных знаний (раздел 2)

21. Матрица тарифов транспортной задачи должна быть:

*a) неотрицательной;

b) квадратной;

c) симметричной;

d) невырожденной

22. Чему равно число линейно независимых ограничений транспортной задачи, если количество складов равно 8, а количество потребителей 11?

a) 19;

b) 20;

*c) 18.

23. Введение фиктивного потребителя для приведения транспортной задачи открытого типа к закрытому означает:

a) введение в матрицу тарифов дополнительно одной нулевой строки;

*b) введение в матрицу тарифов дополнительно одного нулевого столбца;

c) транспонирование матрицы тарифов.

24. Для чего используется метод минимального элемента?

*a) для отыскания начального плана перевозок, удовлетворяющего ограничениям транспортной задачи;

b) для отыскания оптимального плана перевозок транспортной задачи;

c) для приведения транспортной задачи открытого типа к закрытому.

25. В оптимальном плане перевозок транспортной задачи сумма потенциалов любого незадействованного маршрута должна быть:

a) больше тарифа этого маршрута;

b) равна тарифу этого маршрута;

*c) меньше или равна тарифу этого маршрута.

26. Сколько маршрутов (клеток) может входить в состав цикла при решении транспортной задачи методом потенциалов.

*a) четное число больше двух;

b) любое число;

c) столько, сколько задействованных маршрутов насчитывается в плане перевозок.

27. Сколько незадействованных маршрутов (пустых клеток) может входить в состав цикла при решении транспортной задачи методом потенциалов?

a) любое четное число;

b) любое число;

*c) один маршрут (одна клетка).

28. Величины потенциалов транспортной задачи могут принимать:

*a) любые значения;

b) только неотрицательные значения;

c) только целые положительные значения.

29. Какой или какие методы гарантируют получение оптимального плана перевозок транспортной задачи?

a) метод северо-западного угла;

b) метод Гаусса:

*c) метод потенциалов;

d) метод Фогеля.

30. Выберите верные из нижеприведенных утверждений.

a) число переменных транспортной задачи меньше или равно произведению числа складов на число потребителей;

*b) число переменных транспортной задачи равно произведению числа складов на число потребителей;

*c) число переменных транспортной задачи равно размерности матрицы тарифов;

d) число переменных транспортной задачи четно.

Тест 2. Вопросы для оценки качества целостности (CHL) усвоенных знаний (раздел2)

31. Если количество складов в транспортной задаче равно m, а число потребителей равно n, то план перевозок будет вырожденным когда:

*a) число ненулевых элементов в матрице перевозок меньше $m+n-1$;

b) число ненулевых элементов в матрицы перевозок больше $m+n-1$;

c) число нулевых элементов в матрице перевозок равно $m+n-1$.

32. Укажите верные из перечисленных утверждений.

*a) число потенциалов транспортной задачи равно числу переменных ЗЛП двойственной к ней;

*b) число потенциалов транспортной задачи равно суммарному количеству складов и потребителей;

c) число потенциалов транспортной задачи равно общему числу всех возможных маршрутов;

d) число потенциалов транспортной задачи равно числу задействованных маршрутов.

33. Как продолжается решение транспортной задачи, если на каком-то этапе план перевозок оказался вырожденным?

a) один из не задействованных маршрутов полагается условно задействованным с тарифом равным нулю;

*b) один из не задействованных маршрутов полагается условно задействованным с грузопотоком равным нулю;

c) в матрицу тарифов вводится дополнительно нулевой столбец или нулевая строка.

34. Как выбирается направление обхода цикла при реализации метода потенциалов?

a) обход цикла начинается в направлении ближайшей клетки с наименьшей величиной тарифа;

b) обход цикла начинается в направлении ближайшей клетки с наибольшей величиной тарифа;

*c) направление обхода цикла не имеет значения.

35. С какой клетки начинается обход цикла при решении транспортной задачи методом потенциалов?

a) с пустой клетки, соответствующей незадействованному маршруту, для которой сумма потенциалов склада и потребителя отрицательна;

b) с пустой клетки, соответствующей незадействованному маршруту, для которой сумма потенциалов склада и потребителя больше или равна тарифу;

*c) с пустой клетки, соответствующей незадействованному маршруту, для которой сумма потенциалов склада и потребителя больше тарифа.

36. Как выбирается склад или потребитель, для которого потенциал назначается произвольно?

*a) никаких рекомендаций на этот счет нет;

b) выбирается строка или столбец, в котором сумма тарифов минимальна;

c) выбирается строка или столбец, в котором суммарный грузопоток минимален;

d) выбирается строка или столбец, в котором суммарный грузопоток максимален.

37. Укажите верные из перечисленных утверждений.

a) для любой транспортной задачи суммарные запасы грузов на складах равны совокупному спросу потребителей;

b) для любого плана перевозок транспортной задачи сумма потенциалов складов равна сумме потенциалов потребителей;

*c) транспортная задача – это задача линейного программирования в канонической форме.

38. Для транспортной задачи, матрица перевозок которой $X=\begin{pmatrix}8 & 0 & 6\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, а матрица тарифов $C=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 7\\ 6 & 5 & 8\end{pmatrix}$ найти значение потенциала второго склада u_2, если значение потенциала первого склада u_1=0.

a) 0; b) -4; *c) 4; d) 3.

39. Для транспортной задачи, матрица перевозок которой $X=\begin{pmatrix}8 & 0 & 6\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, а матрица тарифов $C=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 7\\ 6 & 5 & 8\end{pmatrix}$ найти значение потенциала второго потребителя v_2, если значение потенциала третьего потребителя v_3=0.

*a) -3; b) 0; c) 4; d) 5.

40. Для транспортной задачи, матрица перевозок которой $X=\begin{pmatrix}8 & 0 & 6\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, а матрица тарифов $C=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 7\\ 6 & 5 & 8\end{pmatrix}$ найти значение потенциала первого потребителя v_1, если значение потенциала второго склада u_2=0.

a) 4; b) -2; c) 0; *d) 5.

2.8. База учебных проблем и задач

Комментарий. Сложность (трудоемкость в минутах/работы) задачи X оценивается экспертом, т.е. за сколько минут непрерывной работы эксперт способен решить эту задачу. Например, эксперт способен решить задачу X за 15 (мин/раб). Будем считать, что сложность задачи X равной S(X) = 15. Как следует из статистических данных, «среднему» студенту для решения задачи X требуется в 5 раз больше мин/раб, поэтому ему отпускается 75 (мин/раб).

Блок задач 1

№ 1. В трех агрокомплексах A_1, A_2 и A_3 имеется молоко в количествах 11 т., 11 т. и 8 т. соответственно. Его необходимо доставить на молокоперерабатывающие комбинаты B_1, B_2, B_3 и B_4, которые могут принять не более 5 т., 9 т., 9 т. и 7 т. молока. Разработать план перевозок молока с агрокомплексов до комбинатов, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 2. На три железнодорожные станции A_1, A_2 и A_3 поступило горючее в количествах 300 т., 200 т. и 200 т. соответственно. Его необходимо перевезти в четыре хранилища B_1, B_2, B_3 и B_4, емкости которых могут принять 150 т., 200 т., 250 т. и 150 т. горючего. Разработать план перевозок горючего, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 3. На трех складах A_1, A_2 и A_3 хранится однородный товар в количествах 74 ед., 40 ед. и 35 ед. соответственно. Его следует доставить в магазины B_1, B_2 и B_3, потребности которых составляют 20 ед., 45 ед. и 30 ед. товара. Разработать план доставки товаров в магазины, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов ***C*** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 4. Уголь, добываемый в трех разрезах A_1, A_2 и A_3 в количествах 300 тыс. т., 300 тыс. т. и 600 тыс. т. соответственно, используется в качестве сырья на четырех горно-металлургических комбинатах B_1, B_2, B_3 и B_4 в объемах 200 тыс. т., 300 тыс. т., 400 тыс. т. и 400 тыс. т. Разработать план доставки угля к местам его использования, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 5. Для строительства четырех автомобильных дорог необходим гравий в количествах 130 тыс. т., 260 тыс. т., 60 тыс. т. и 70 тыс. т. соответственно, который может быть получен из трех карьеров, чьи запасы составляют 120 тыс. т., 280 тыс. т, и 160 тыс. т. Разработать план перевозки гравия к местам строительства, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 6. В трех угольных разрезах добывается уголь в количествах 800; 500 и 500 тыс. тонн соответственно, который потребляется четырьмя крупными горно-металлургическими комбинатами в количествах 500; 400; 300 и 700 тыс.тонн. Разработать план доставки угля потребителям, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 7. В четыре супермаркета поступает картофель с трех овощебаз. Дневная потребность магазинов составляет 70; 180; 150 и 50 тонн соответственно. Возможности баз равны 100; 170 и 180 тонн. Разработать план доставки картофеля в магазины, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 10 & 2 \\ 10 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 8. В четыре супермаркета поступают мясопродукты от трех поставщиков. Дневная потребность магазинов составляет 90; 70; 160 и 130 тонн соответственно. Возможности поставщиков равны 100; 200 и 150 тонн. Разработать план доставки продукции в магазины, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 7 \\ 9 & 6 & 8 & 4 \\ 11 & 5 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 9. На четыре овощебазы поступает продукция из трех агрокомплексов. За сутки базы могут принять 130; 100; 300 и 270 тонн овощей соответственно. Возможности поставщиков равны 200; 350 и 250 тонн. Разработать план доставки продукции на базы, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 10 & 9 \\ 12 & 9 & 11 & 5 \\ 14 & 7 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 10. В четыре котельные поступает мазут из трех нефтебаз. Недельная потребность котельных составляет 60; 50; 80 и 160 тонн мазута соответственно. Возможности поставщиков равны 100; 100 и 150 тонн. Разработать план доставки продукции в магазины, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 1 & 7 \\ 9 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 11. В четыре супермаркета поступает сахарный песок от трех производителей. Недельный объем продаж магазинов составляет 105; 75; 50 и 145 тонн соответственно. Возможности поставщиков равны 100; 150 и 125 тонн. Разработать план доставки продукции в магазины, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 & 6 \\ 12 & 7 & 8 & 6 \\ 11 & 6 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 12. На три лесопилки поступает древесина от четырех независимых бригад. Каждая из лесопилок может обработать за неделю 300; 250 и 300 кубометров древесины соответственно. Возможности бригад равны 290; 300; 220 и 280 кубометров. Разработать план доставки древесины на переработку, минимизирующий суммарные транспортные издержки и найти его стоимость, если матрица тарифов **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

Блок задач 2

№ 1. Решить свой вариант задачи из Блока 1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

№ 2. Решить свой вариант задачи из Блока 1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

№ 3. Решить свой вариант задачи из Блока 1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

№ 4. Решить свой вариант задачи из Блока 1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

№ 5. Решить свой вариант задачи из Блока 1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

№ 6. Решить свой вариант задачи из Блока 1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

№ 7. Решить свой вариант задачи из Блока 1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

№ 8. Решить свой вариант задачи из Блока 1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

№ 9. Решить свой вариант задачи из Блока 1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

№ 10. Решить свой вариант задачи из Блока1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

№ 11. Решить свой вариант задачи из Блока 1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

№ 12. Решить свой вариант задачи из Блока 1, изменив тариф северо-западного угла на 3 ед. в большую сторону с помощью *пакета Ms Excel.*

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)= 5

Блок задач повышенной сложности

№1. Четыре электростанции A_1, A_2, A_3 и A_4 вырабатывают 17; 14; 9 и 11 миллионов киловатт-часов электроэнергии в год соответственно. Произведенная ими энергия используется пятью крупными потребителями B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5, согласованные заявки которых равны 12; 5; 17; 7 и 10 миллионов киловатт-часов в год. Требуется сформировать график перетоков энергии, минимизирующий общую потери энергии при передаче и определить величину потерь, если матрица удельных потерь **C** имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 8 & 15 & 11 \\ 2 & 7 & 1 & 20 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 10 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(0)=20.

№2. Предлагаемая ниже транспортная задача задана в форме таблицы. Числа, расположенные во внутренних клетках таблиц, являются элементами матриц тарифов.

потребности запасы	500	400	300	700
800	1	4	7	3
500	5	2	6	9
500	6	3	8	5

Время, достаточное для решения экспертом, S(0)=20.

№3. Предлагаемая ниже транспортная задача задана в форме таблицы. Числа, расположенные во внутренних клетках таблиц, являются элементами матриц тарифов.

потребности запасы	500	120	180	200
190	8	23	21	19
310	28	16	5	7
260	7	15	4	5
140	6	4	21	3

Время, достаточное для решения экспертом, S(0)=25.

№4. Предлагаемая ниже транспортная задача задана в форме таблицы. Числа, расположенные во внутренних клетках таблиц, являются элементами матриц тарифов.

потребности запасы	100	170	160	170
250	5	6	7	16

200	8	9	15	18
150	10	11	13	20

Время, достаточное для решения экспертом, S(0)=30.

№5. Предлагаемая ниже транспортная задача задана в форме таблицы. Числа, расположенные во внутренних клетках таблиц, являются элементами матриц тарифов.

потребности запасы	100	180	160	160
150	6	12	15	4
250	12	11	5	3
200	9	17	14	10

Время, достаточное для решения экспертом, S(0)=30.

Раздел 3. Дискретное программирование

В ряде задач математического программирования множество допустимых планов (решений) дискретно, что является следствием особенностей постановки этих задач, а также физического или экономического смысла переменных, входящих в их состав. Прежде всего, это задачи с физической неделимостью факторов или объектов расчета. Действительно, количество изготовленных телевизоров, проданных велосипедов, перевезенных пассажиров может выражаться только натуральными числами. Подобные задачи образуют довольно широкий подкласс задач целочисленного программирования. К задачам дискретного программирования относятся и задачи с логическими переменными, принимающими только два значения – ноль и единица. Такие задачи типичны в сфере кадрового менеджмента, построения оптимального графика выполнения комплекса работ и т.д. В настоящее время известно огромное количество подобных задач и их глубокому и всестороннему изучению посвящено много специальной литературы. В данной главе рассмотрены постановка наиболее известных и широко распространенных задач дискретного программирования, а также некоторые методы их решения.

3.1. Инструкция к организации учебной работы (раздел 3)

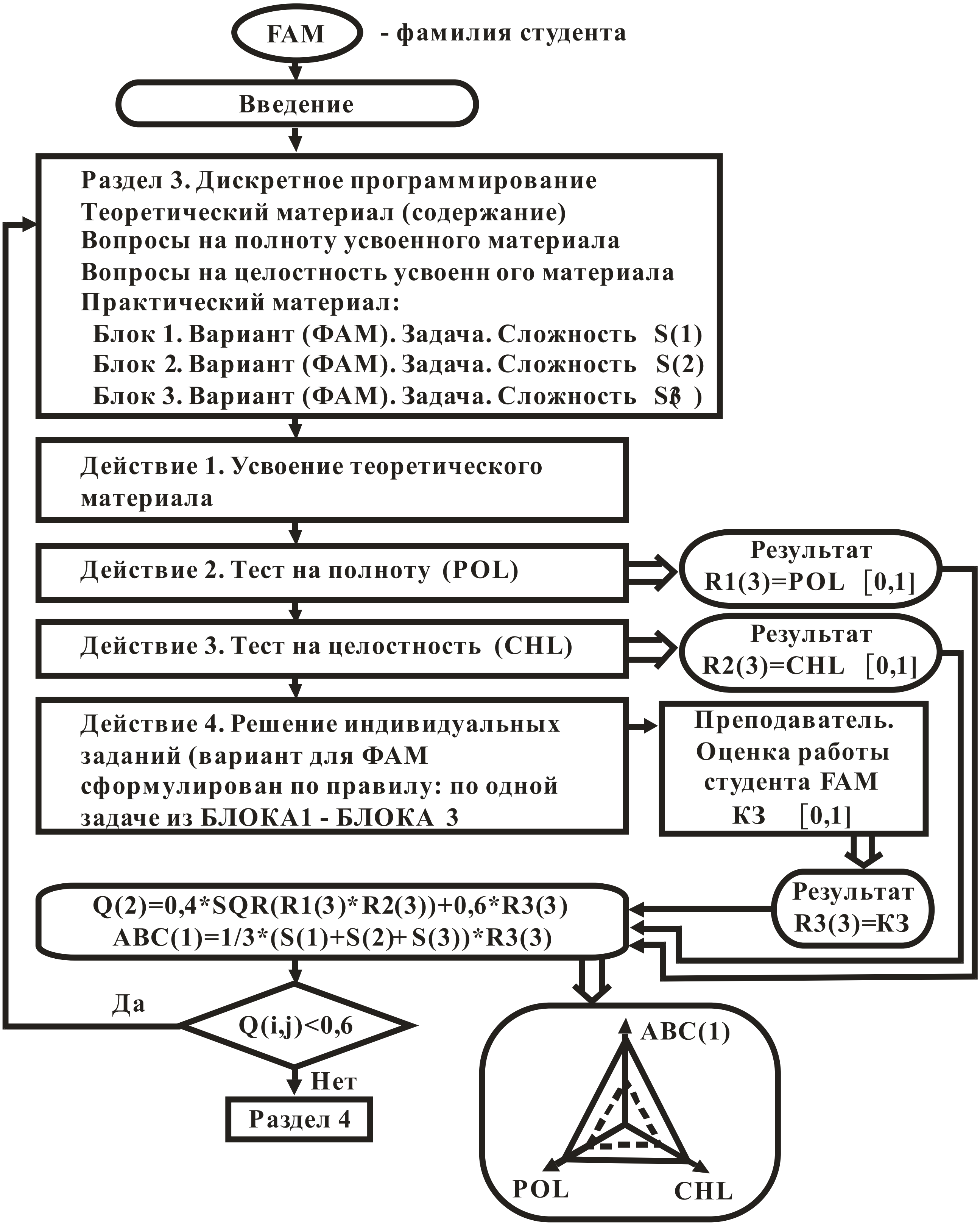


Рис. 3.1. Схема организации подготовки

3.2. Постановка задач дискретного программирования

Рассмотрим особенности постановки различных типов задач дискретного программирования на конкретных примерах.

Задача о контейнерных перевозках. Грузовой контейнер разделен на m отсеков вместимостью b_i $(i = 1,m)$. Предполагается использовать его для перевозки n видов грузов G_j $(j = 1,n)$ которые обладают свойством неделимости. Обозначим a_{ij} объем, занимаемый единицей j-го груза в i-м отсеке контейнера; обозначим C_j доход, который может быть получен от перевозки единицы j-го груза. В рамках сделанных обозначений может быть поставлена задача: сформировать план загрузки контейнера так, чтобы доход, получаемый, от перевозки, был бы максимальным. Обозначая X_j- количество единиц j-го груза, планируемое к перевозке, получим математическую формулировку задачи: $Z = \max \sum\limits_{j=1}^{n} C_j \cdot X_j,$ при ограничениях на вместимость отсеков: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_j (i = \overline{1,m}),$ условии не отрицательности $x_j \ge 0$ и условии неделимости грузов, выражающееся требованием целочисленности переменных $x_j \in N$ $(j = \overline{1,n}),$ где N - множество натуральных чисел. Единственное отличие полученной задачи от классической задачи линейного программирования состоит в дополнительном требовании целочисленности переменных, без которого данная задача утрачивает содержательный смысл.

Задача о назначениях. Она является исторически первой задачей дискретного программирования. Впервые она была сформулирована в 1932 г. как задача занимательной математики, которая в оригинальной постановке называлась задачей о женихах и невестах. Рассмотрим современную постановку этой задачи. Пусть имеется n работ, на которые могут быть назначены n исполнителей.

Предполагаются известными полезности C_{ij}, связанные с выполнением i-м исполнителем j-ой работы $(i, j = \overline{1,n})$. Под полезностью понимается какой-либо количественный критерий, оценивающий выполнение работы, например, количество работы, сделанной в единицу времени, вероятность завершения работы к определенному сроку и т.п. Требуется осуществить назначение исполнителей на работы так, чтобы общая полезность всего комплекса выполненных работ была максимальной при условии, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу и каждой работой должен заниматься только один исполнитель. (В оригинальной постановке: каждый юноша и каждая девушка должны найти себе пару; полигамия не допускается.) Обозначим x_{ij} факт назначения (не назначения) i-го исполнителя на j-ю работу. Т.к. количество исполнителей равно количеству работ, множество чисел $\{x_{ij}\}$ представимо матрицей размерности $n \times n$, называемой <u>матрицей назначений</u>. Поскольку по условию задачи каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу, переменные x_{ij} могут принимать только два значения: 1 – если соответствующее назначение состоялось и 0 в противном случае. Переменные такого типа носят название булевых. В матрице же назначений в каждой строке и каждом столбце содержится только по одному ненулевому элементу. С учетом вышеизложенного целевая функция задачи имеет вид: $Z = max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$, при ограничениях, $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = \overline{1,n}),$ что означает назначения каждого исполнителя только на одну работу, и $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1,n})$ назначение на каждую работу только одного исполнителя. Условия не отрицательности и целочисленности очевидны $x_{ij} \geq 0; \quad x_{ij} \in \{0;1\}$. Заметим, что без требования булевости переменных задача о назначениях обращается в ЗЛП аналогичную транспортной задаче.

Задача коммивояжера. Коммивояжер должен посетить один и только один раз каждый из n городов и вернуться в исходный пункт. Предполагается, что между любыми двумя городами существует прямое сообщение. Необходимо выбрать такую схему движения, при которой суммарная длина пути была бы минимальной. В терминах теории графов эта задача формулируется как задача отыскания минимального гамильтонова пути полного графа. Покажем, что она так же может быть поставлена как задача дискретного программирования. Обозначим, C_{ij}, расстояние между i-м и j-м городами $(i, j = \overline{1,n})$, эти числа предполагаются известными. Факт перемещения (не перемещения) между городами обозначим, x_{ij}. Переменные x_{ij} могут принимать два значения: $x_{ij} = 1$, если перемещение между i-м и j-м городами имеет место, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Тогда математическая формулировка задачи будет иметь вид $Z = min\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij};$ при ограничениях: $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1$ (коммивояжер в каждый город въезжает только один раз); $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1$ (коммивояжер из каждого города выезжает только один раз); $x_{ij} \geq 0;\ \ x_{ij} \in \{0;1\}$. К сожалению, эти ограничения (полностью аналогичные ограничениям задачи о назначениях) недостаточны, т.к. допускают решения, представляющие несколько несвязанных между собой циклических маршрутов. Эта проблема снимается введением дополнительных ограничений вида

(*) $u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1\ \ (i, j = \overline{2,n};\ i \neq j),$ где переменные u – некоторые действительные числа, например, соответствующие номеру города в порядке следования по маршруту. Покажем, что эти ограничения исключают существование нескольких не связанных подциклов и не исключают замкнутого связного маршрута, искомого в задаче. Рассмотрим циклический маршрут, включающий К городов ($к < n$). Суммируем все неравенства (*) по всем К городам в порядке их следования. В силу связности и замкнутости маршрута все элементы $kn \leq k(n\text{-}1)$, что является противоречием и указывает на невозможность подобного маршрута. Для замкнутого цикла, проходящего по всем городам в парах (i, j), где $x_{ij} = 0$ неравенства (*) выполняются в силу того, что $1 \leq u :\leq n$ для любого i, в случае $x_{ij} = 1$ выражение (*) выполняется как строгое равенство, т.к. в этом случае $u_i - u_j = -1$. Переменные рассмотренной задачи, как x_{ij}, так и u_i, входят в состав целевой функции и ограничений линейно. Таким образом, так же, как и две задачи, рассмотренные выше, задача коммивояжера, без условия целочисленности, есть ЗЛП.

3.3. Решение задач целочисленного программирования

Точное решение задач целочисленного программирования может быть получено двумя путями: методами отсечений и методом ветвей и границ. Рассмотрим каждый из них и на конкретных примерах познакомимся с техническими аспектами их реализации.

Общая идея решения задач целочисленного программирования методами отсечения состоит в последовательном отбрасывании планов исходной ЗЛП, не обладающих свойством целочисленности путем построения новых ограничений, называемых правильными отсечениями. Они обладают двумя важными свойствами: 1. Нецелочисленный оптимальный план исходной ЗЛП не удовлетворяет этим ограничениям. 2. Любой целочисленный план исходной ЗЛП удовлетворяет им. Последовательность отсечений строится до тех пор, пока очередная ЗЛП не будет иметь полностью целочисленный оптимальный план. Известно несколько способов практической реализации этой идеи. Рассмотрим один из них, предложенный американским математиком Р.Гомори и названный в его честь алгоритмом Гомори.

Как было упомянуто в разделе 1. 1. 2, любая система линейных уравнений посредством эквивалентных преобразований приводится к треугольному виду, или, будучи разрешенной, относительности базисных переменных:

$$x_i = \beta_i - \sum_{x_j \in \{cn\}} \alpha_{ij} x_j ,\ x_i \in \{БП\},$$

где $\{БП\}$ - множество базисных переменных; $\{СП\}$ – множество свободных переменных. Если условие оптимальности ЗЛП при решении этой системы выполнено и все элементы оптимального плана являются целыми числами, то задача целочисленного программирования решена. Рассмотрим оптимальный план ЗЛП, в котором компонента под номером i_o не целая. Для нее $x_{i_o} = \beta_{i_o} - \sum_{x_j \in \{cn\}} \alpha_{i_o j} x_j$. Выделим целые и дробные части коэффициентов этого уравнения, $\beta_{i_o} = [\beta_{i_0}] + \{\beta_{i_0}\};\ \alpha_{i_0 j} = [\alpha_{i_0 j}] + \{\alpha_{i_0 j}\}$, где символом [ ] обозначена целая часть числа, а символом { } - дробная. Тогда уравнение может быть записано в виде $x_{i_0} = \left([\beta_{i_0}] - \sum_{x_j \in \{cn\}} [\alpha_{i_0 j}] x_j \right) + \left(\{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_o j}\} x_j \right)$. Для обеспечения целочисленности x_{io} необходимо, чтобы вторая скобка в правой части была целым числом, т.к. первая скобка целая по определению. Покажем, что это достигается при условии, что $\{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j \le 0.$ Очевидно, что $\sum_{x_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j \ge 0,$ как сумма произведений неотрицательных сомножителей. И если предположить, что $\{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j > 0$ и целое, отсюда следует, что $\{\beta_{i_o}\} > 1,$ что противоречит определению дробной части числа. Это доказывает, что любое целочисленное решение ЗЛП должно удовлетворять неравенству $\{\beta_{i_0}\} - \sum\limits_{x_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x_j \le 0$. Это неравенство определяет <u>правильное отсечение Гомори.</u>

<u>Лемма</u>. Правильное отсечение Гомори 1. Линейно. 2. Не отсекает ни одного целочисленного решения ЗЛП. 3. Отсекает оптимальное нецелочисленное решение ЗЛП.

Линейность правильного отсечения очевидна, а второе свойство следует непосредственно из процедуры его построения. Покажем третье. Пусть x^* – нецелочисленный оптимальный план ЗЛП. Положим, для определенности, что базисная координата x^*_{io} не целая. Поскольку x^* – оптимальный план $\sum\limits_{x_j \in \{СП\}} \{\alpha_{i_0 j}\} x^*_j = 0$. Но в этом случае $\{\beta_{i_0}\} \le 0$, что противоречит определению дробной части числа. Следовательно, правильное отсечение устраняет план x^* из множества допустимых планов.

Если в оптимальном плане ЗЛП имеется несколько нецелых координат, в симплекс-таблице выбирается строка, содержащая свободный член с дробной максимальной частью. Алгебраически построение правильного отсечения означает введение в систему ограничений ЗЛП дополнительного ограничения с дополнительной переменной. Процесс построения отсечений продолжается до тех пор, пока очередное отсечение не приведет к ЗЛП, все компоненты оптимального плана которой будут целочисленными. Признаком невозможности получения целочисленного решения с помощью данного алгоритма служит появление в симплекс-таблице хотя бы одной строки с не целым свободным членом и целыми остальными элементами, т.к. в этом случае соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах.

<u>Замечание.</u> В ряде практических случаев процесс построения правильных отсечений, приводящий к целочисленному решению, оказывается достаточно длительным. Поэтому решение сколько-нибудь сложных задач целочисленного программирования с

помощью алгоритма Гомори требует привлечения вычислительной техники.

Пример 9. Найти целочисленное решение ЗЛП:

$Z = max\ x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 3, & x_j \ge 0 \\ 3x_1 - x_2 \le 3, & j = \overline{1,2} \end{cases}$$

Приводя задачу к каноническому виду, получим:

$Z = max\ x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, & x_j \ge 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 3, & j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Решение задачи обычным симплекс-методом приводит к оптимальному опорному плану, $x^* = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0)$, на котором целевая функция принимает значение $Z(x^*) = 3$. Итоговая симплекс-таблица решения этой задачи имеет вид:

Таблица 6а.

№ шага	Базисные переменные	Коэффициенты целевой функции при базисных переменных C_i^s	Значения базисных переменных β_i	Элементы матрицы ограничений			
				x_1	x_2	x_3	x_4
1	2	3	4	5	6	7	8
2	x_2	1	3/2	0	1	3/8	1/8
	x_1	1	3/2	1	0	1/8	3/8
Инд. стр.	$f(x^*)$	3	$\Delta_j = d_j - c_j$	0	0	1/2	1/2

В полученном плане обе базисные компоненты не целые. Поскольку их дробные части равны, формируем правильное отсечение, например, по строке x_1. Используя соотношение правильного отсечения Гомори, получим: $\{3/2\} - \{1/8\} x_3 - \{3/8\} x_4 \le 0$, откуда, по определению дробной части числа, $1/8 x_3 + 3/8 x_4 \ge \frac{1}{2}$. Или в целых числах $x_3 + 3x_4 \ge 4$. Приводя к каноническому виду, получим еще одно ограничение с дополнительной переменной. Это приводит к появлению в симплекс-таблице новой строки, нового столбца и дополнительной переменной в базисе.

Таблица 6b .

№ шага	Базисные переменные	Коэффиц. целевой функции при баз. переменных C_i^s	Значения базисных переменных β_i	Элементы матрицы ограничений					θ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_2 x_1 -	1 1 -	3/2 3/2 4	0 1 0	1 0 0	3/8 1/8 1	1/8 3/8 3	0 0 -1	$\frac{4}{3}$
Инд. стр.	$f(x^2)$	3	$\Delta_j = d_j - c_j$	0	0	1/2	1/2	0	
3	x_2 x_1 x_4	1 1 0	$4/3$ 1 $4/3$	0 1 0	1 0 0	$1/3$ 0 $1/3$	0 0 1	$1/24$ $1/8$ $-1/3$	
Инд. стр.	$f(x^3)$	7/3	$\Delta_j = d_j - c_j$	0	0	1/3	0	1/6	

Обычным порядком, выполняя симплекс-преобразования, вводим в базис переменную x_4 и получаем новый оптимальный опорный план ЗЛП с новым ограничением $x^3 = (1, 4/3, 0, 4/3, 0)$, значение целевой функции на котором $F(x^3)$=7/3. Все элементы индексной строки неотрицательны, но целочисленность не достигнута. Строим новое правильное отсечение по строке x_2 $\{4/3\}-\{1/3\}x_3-\{1/24\}x_5 \le 0$. Выполняя преобразования и приводя ограничение к каноническому виду, получим $8x_3+x_5-x_6=8$. Дополняем симплекс-таблицу новой строкой для вновь сформулированного ограничения и столбцом для новой переменной x_6.

Таблица 6с.

№ шага	Базисные переменные	Коэффициент целевой функции при базисн. переменных C_i^s	Значения базисных переменных β_i	Элементы матрицы ограничений						θ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3	x_2	1	$4/3$	0	1	$1/3$	0	$1/24$	0	
	x_1	1	1	1	0	0	0	$1/8$	0	1
	x_4	0	$4/3$	0	0	$1/3$	1	$-1/3$	0	
	–	–	8	0	0	8	0	1	-1	
Инд. стр.	$f(x^3)$	$\frac{7}{3}$	$\Delta_j = d_j - c_j$	0	0	1/3	0	1/6	0	
4	x_2	1	1	0	1	0	0	0	$1/24$	
	x_1	1	1	1	0	0	0	$1/8$	0	
	x_4	0	1	0	0	0	1	$-3/8$	$1/24$	
	x_3	0	1	0	0	1	0	$1/8$	$-1/8$	

Инд. стр.	$f(x^4)$	2	$\Delta_j = d_j - c_j$	0	0	0	0	1/8	1/24	

Полученный план $x^4 = (1, 1, 1, 1, 0, 0)$ является целочисленным и оптимальным, поскольку все элементы индексной строки неотрицательны. Таким образом, опорный план x^4 является оптимальным целочисленным решением ЗЛП, а значение целевой функции $f(x^4) = 2$ реализует максимум линейной формы на множестве целочисленных допустимых планов ЗЛП. В данной задаче для получения целочисленного решения потребовалось построение двух правильных отсечений Гомори.

Перейдем к рассмотрению решения задач целочисленного программирования методом ветвей и границ. Этот метод относится к классу комбинаторных методов решения, основная идея которых может быть проиллюстрирована на известном примере отыскания фальшивой монеты среди настоящих, если различие между ними можно обнаружить только взвешиванием. Наиболее быстрый способ выявления фальшивки состоит в разделении общего количества монет на две равные части и сравнении их весов. Это позволяет сократить число подозрительных монет вдвое. Продолжая этот процесс и осуществляя должное количество взвешиваний, устанавливаем фальшивую монету.

Отыскание решения задач целочисленного программирования ведется по аналогичной схеме. Вначале ЗЛП решается обычным порядком, и если какая-либо из компонент оптимального плана оказывается нецелочисленной, например x_i^*, выполняется разбиение (ветвление) множества допустимых планов задачи на два подмножества по ближайшим к x_i^* целым элементам множества допустимых планов. Процесс ветвления продолжается вплоть до нахождения целочисленного решения, или до исчерпания вариантов ветвления.

Пример 10. Найти целочисленное решение ЗЛП:

$Z = max\ 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_j \ge 0,\ x_j \in N,\ \ j = \overline{1,2} \end{cases}$$

Максимум целевой функции этой задачи без учета целочисленности достигается в точке $x_1^* = 3\frac{12}{17}$, $x_2^* = 2\frac{6}{17}$ и составляет $Z(x^*) = 14\frac{8}{17}$. Т.к. обе переменные не целые, выбираем любую из них, например x_2, и осуществляем ветвление по ближайшим целочисленным значениям переменной x_2^*, т.е. $\lfloor x_2^* \rfloor = 2$ и $\lfloor x_2^* \rfloor + 1 = 3$. Это порождает две новые ЗЛП:

$$Z = max\ 2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad Z = max\ 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36 \\ x_2 \le 2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36 \\ x_2 \ge 3 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\quad x_j \in N;\quad j = \overline{1,2}.$$

Полагая в первой задаче $x_2 = 2$, получим решение: $x_1^* = 4\frac{1}{5}$, $x_2^* = 2$, $Z^1\left(x^*\right) = 14\frac{2}{5}$, причем первое ограничение в этом случае выполняется как строгое равенство. Аналогично во второй задаче, полагая $x_2 = 3$, получим $x_1^* = 2\frac{1}{4}$, $x_2^* = 3$, $Z^2\left(x^*\right) = 13\frac{1}{2}$. Ни в одном ветвлении целочисленного решения не достигнуто и в принципе необходимо продолжить обе ветви, но вначале целесообразно продолжит первую ветвь, т.к. на ней значение целевой функции больше. Ветвление по x_1 :

$$Z^{1.1} = max\, 2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad Z^{1.2} = max\, 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36 \\ x_1 \le 4;\, x_2 \le 2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36 \\ x_1 \ge 5;\, x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0; \quad x_j \in N; \quad j = \overline{1,2}.$$

Для первой подзадачи $x^*_1 = 4, \quad x_2^* = 2,\ Z^{1.1}\left(x^*\right) = 14.$

Для второй подзадачи $x^*_1 = 5, \quad x_2^* = 1\dfrac{3}{7},\ Z^{1.2}\left(x^*\right) = 14\dfrac{2}{7}.$

Дальнейшее ветвление можно не продолжать, поскольку очевидно, что лучшее целочисленное решение, нежели $Z^{1.1}\left(x^*\right) = 14,$ получить невозможно.

Замечание. Несмотря на то, что метод ветвей и границ весьма прост в реализации, целочисленное решение ЗЛП большой размерности требует значительных усилий и невозможно без привлечения вычислительной техники. Кроме того, объем вычислений существенно зависит от выбора переменной, с которой начинается ветвление.

Заключая рассмотрение методов решения задач целочисленного программирования необходимо особо отметить в качестве их общей особенности чрезвычайную трудоемкость. Поэтому при решении практических целочисленных задач большой размерности часто применяют метод округления, который состоит в том, что у нецелочисленных базисных переменных оптимального плана просто отбрасываются мантиссы и полученный результат принимается в качестве целочисленного решения. В общем случае оно не совпадает с точным целочисленным решением, но позволяет быстро получить приемлемый результат, когда точность не является необходимой.

3.4. Решение задачи коммивояжера

Так же как и для задач целочисленного программирования, для задачи коммивояжера принято различать точные и приближенные методы решения. Один из приближенных методов, позволяющий найти некоторый гамильтонов путь, называется <u>метод ближайшего соседа</u>. Алгоритм этого метода чрезвычайно прост и напоминает метод минимального элемента для нахождения начального плана перевозок транспортной задачи. В составе графа выбирается произвольная вершина, и из нее осуществляется переход в вершину, расстояние до которой наименьшее. Такой процесс отбора вершин и переходов продолжается вплоть до получения гамильтонова контура. Естественно, что выбор вершины, в которую выполняется очередной шаг, производится из множества вершин еще не вошедших в путь.

<u>Замечание:</u> Длина полученного таким способом гамильтонова пути существенно зависит от выбора начальной вершины.

Пример 11. Определить оптимальную последовательность запуска в производство пяти деталей, минимизирующую потери от переналадок оборудования, если матрица потерь имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 35 & 45 & 20 & 11 \\ 9 & \infty & 17 & 6 & 8 \\ 21 & 31 & \infty & 2 & 11 \\ 30 & 15 & 40 & \infty & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & \infty \end{pmatrix},$$

где элементы: $C_{ij}\left(i, j = \overline{1,5}\right)$ определяют величину потерь по причине переналадок оборудования при переходе от изготовления $i-$ой детали на изготовление *j*-ой. То, что $C_{ij} = \infty$ при $i = j$ означает отсутствие петель в графе переналадок. Найдем приближенное решение этой задачи методом ближайшего соседа.

Пусть первой в производство запущена 1-я деталь. Ищем в первой строке матрицы потерь минимальный элемент. Это элемент пятого столбца, равный 11, следовательно, вслед за деталью 1-й в производство запускается 5-я. Минимальный элемент 5-й строки находится в 4-м столбце и равен 7, т.е. после 5-й в производство запускается 4-я деталь. Минимальный элемент 4-й строки находится в 5-м столбце, но т.к. 5-ая деталь уже изготовлена, находим следующий по величине элемент. Он находится во втором столбце и равен 15, значит, после 4-ой изготавливается, 2-я деталь. Поскольку осталась только 3-я деталь, находим во второй строке элемент третьего столбца. Он равен 17 и определяет затраты на переналадку при переходе со 2-й детали на 3-ю. И, наконец, возврат к 1-ой детали с 3-ей оценивается величиной 21, элемент C_{31}. Общая сумма затрат определяется как сумма всех перечисленных элементов:

$$S_1 = C_{15} + C_{54} + C_{42} + C_{23} + C_{31} = 11 + 7 + 15 + 17 + 21 = 71.$$

Для иллюстрации зависимости решения от выбора начальной вершины рассмотрим длину гамильтонова пути той же задачи, получаемого методом ближайшего соседа, при начале движения из второй вершины (процесс производства начинается с изготовления 2-й детали). В этом случае:

$$S_1 = C_{24} + C_{45} + C_{53} + C_{31} + C_{12} = 6 + 10 + 8 + 21 + 35 = 80.$$

Точное решение задачи коммивояжера может быть получено только методом ветвей и границ, если не считать, разумеется, метод полного перебора. Разберем практический способ реализации этого метода, применительно к задаче коммивояжера, который носит название <u>алгоритма Литтла.</u> Основная идея этого алгоритма состоит в отыскании для всего множества гамильтоновых контуров Ω^0 <u>точной нижней грани</u> $\varphi\left(\Omega^0\right)$ их длин. Затем множество Ω^0 разбивается на два подмножества Ω^1_{ij} и $\Omega^1_{\bar{ij}}$, первое из которых содержит дугу, связывающую *i*-ую и *j*-ую вершины графа, а второе не содержит. Очевидно, что $\varphi(\Omega^0) \le \varphi(\Omega^1_{ij})$ и $\varphi(\Omega^0_{ij}) \le \varphi(\Omega^1_{\bar{ij}})$. Сравнивания нижние границы этих подмножеств $\varphi(\Omega^1_{ij})$ и $\varphi(\Omega^1_{\bar{ij}})$, выбирают наименьшую и продолжают разбиение тем же порядком вплоть до получения гамильтонова контура. При необходимости так же выполняют ветвление и другого подмножества. Для практической реализации алгоритма Литтла необходимо указать способ определения нижних границ длин гамильтоновых контуров и технику ветвления, т.е. разбиения множества гамильтоновых контуров на подмножества.

Теорема. Пусть $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij}$ – целевая функция задачи коммивояжера с матрицей перемещений $C = (C_{ij})_{n\times n}$ $x^* = (x^*_{ij})_{n\times n}$ - оптимальный план перемещений, тогда если к элементам любой строки (столбца) матрицы С прибавить или вычесть некоторое число, то от этого оптимальность плана перемещений не изменится, а длина любого гамильтонова контура изменится на данную величину.

Прибавим к элементам строк матрицы C числа U_i $(i = \overline{1,n})$, а к элементам столбцов числа $\upsilon_j (i = \overline{1,n})$. Тогда можно сформулировать новую задачу коммивояжера с целевой функцией $Z^1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} \pm U_i \pm \upsilon_j)x_{ij}$. Разделяя суммы и учитывая ограничения задачи, получим:

$$Z^1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \pm \sum_{i=1}^{n}U_i \sum_{j=1}^{n}x_{ij} \pm \sum_{j=1}^{n}\upsilon_j \sum_{i=1}^{n}x_{ij} = Z \pm \sum_{i=1}^{n}U_i \pm \sum_{j=1}^{n}\upsilon_j = Z + L,$$ где

$L = \pm\sum_{i=1}^{n}U_i \pm \sum_{j=1}^{n}\upsilon_j$. Поскольку L не зависит от x_{ij}, функции Z и Z^1 достигают экстремальных значений на одном и том же плане x^*.

Вычитая из каждой строки матрицы коммивояжера C числа U_{ij}, равные минимальному элементу в строке, получим матрицу C' с элементами $C^1_{ij} = C_{ij} - min\, C_{ij}$. Вычитая из каждого столбца матрицы C' числа υ_j, равные минимальному элементу в столбце, получим матрицу C'' с элементами $C''_{ij} = C_{ij} - min\, C_{ij} - min\, C'_{ij}$. Матрица C''

называется приведенной по строкам и столбцам. В этой матрице все $C''_{ij} \geq 0$, причем в каждой строке и каждом столбце имеется, по крайней мере, один нулевой элемент. Величина $\varphi_0 = \sum_{i=1}^{n} U_i + \sum_{j=1}^{n} \upsilon_j$ называется <u>константой приведения</u>.

<u>Лемма.</u> Пусть дана задача коммивояжера с матрицей $C = (C_{ij})_{n \times n}$. Константа приведения этой матрицы φ_0 определяет нижнюю границу гамильтоновых контуров этой задачи.

В соответствии с доказанной теоремой для любого плана перемещения X задачи коммивояжера, т.е. для любого гамильтонова пути выполняется соотношение $Z'' = Z - \varphi_0$, или $Z = Z'' + \varphi_0$. Поскольку в приведенной матрице $C''_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,n})$, целевая функция приведенной задачи неотрицательна $Z'' \geq 0$, а значит, $Z \geq \varphi_0$ для любого плана перемещений X, что соответствует определению точной нижней грани.

Как было упомянуто выше, процесс ветвления при реализации алгоритма Литтла осуществляется по факту вхождения или не вхождения некоторой дуги в состав гамильтонова пути. Выясним, какие именно дуги следует выбирать. Выделим в приведенной матрице коммивояжера C'' нулевые элементы. <u>Степенью нулевого элемента</u> $\theta_{i_0 j_0}$, находящегося на пересечении строки i_0 и столбца j_0, называется сумма минимальных элементов строки i_0 и столбца j_0 матрицы C''. Т.е. $\theta''_{i_0 j_0} = min\, C''_{i_0 j} + min\, C''_{i j_0}$. Интуитивно понятно (и может быть строго доказано), что минимальному гамильтонову контуру с наибольшей вероятностью принадлежат дуги, которым в приведенной матрице коммивояжера соответствуют нулевые элементы с максимальной степенью. Именно по наличию или отсутствию этих дуг в гамильтоновом пути выполняется ветвление. Это порождает две новые матрицы, в которых соответствующие элементы равны бесконечности. Для вновь полученных матриц выполняется операция приведения, отыскивается нижняя граница гамильтоновых контуров, и процесс ветвления продолжается в том же порядке до тех пор, пока все возможности ветвления не будут исчерпаны. Результатом решения, в силу свойств предлагаемого алгоритма, будет гамильтонов контур наименьшей протяженности. Используя условия примера 11, найдем минимальную длину гамильтонова контура на числовом примере и определим оптимальную последовательность запуска деталей в производство, при которой потери от переналадки оборудования становятся минимально возможными.

Пример 11 (продолжение). Представим исходную матрицу потерь в виде таблицы и преобразуем ее в соответствии с правилами приведения.

Таблица 7a					Таблица 7b					Таблица 7c				
∞	35	45	20	11	∞	24	34	9	0	∞	22	33	9	0
9	∞	17	6	8	3	∞	11	0	2	0	∞	10	0	2
21	31	∞	2	11	19	29	∞	0	9	16	27	∞	0	9
30	15	40	∞	10	20	5	30	∞	0	17	3	29	∞	0
10	9	8	7	∞	3	2	1	0	∞	0	0	0	0	∞

Приведение по строкам дает таблицу 7b, где $\sum_{i=1}^{5} u_i = 36$. Приведение по столбцам дает таблицу 7c, где $\sum_{i=1}^{5} \vartheta_i = 6$. Таким образом, константа приведения, определяющая точную нижнюю границу гамильтоновых контуров данной задачи, $\varphi^0 = \sum_{i=1}^{5} u_i + \sum_{j=1}^{5} \vartheta_j = 42$. Максимальная степень нулевого элемента реализуется на элементе C''_{53} (см. таблицу 7c) и равна $\theta_{53} = 10$. Значит, первое ветвление осуществляется по дуге, определяющей движение из пятой вершины к третьей. Этим порождается два подмножества гамильтоновых путей: $\Omega^1{}_{53}$ – содержащих дугу (5-3) и $\Omega^1_{\overline{53}}$ - не содержащих ее. Матрица, соответствующая подмножеству $\Omega^1{}_{53}$, получается из матрицы C'' путем вычеркивания из нее пятой строки и третьего столбца, поскольку еще один <u>выход</u> из пятой вершины и <u>вход</u> в третью невозможен; и заменой элемента C''_{35} бесконечностью, поскольку возвращение в пятую вершину сразу из третьей также исключено. Матрица подмножества $\Omega^1{}_{\overline{53}}$, в соответствии с заявленными для него свойствами, получается из, матрицы C'' (см. таблицу 7с) путем замены элемента C''_{35} бесконечностью. Результаты преобразований представлены в таблицах 8 и 9.

Таблица 8						Таблица 9				
i / *j*	1	2	4	5		∞	22	33	9	0
1	∞	22	9	0		0	∞	10	0	2
2	0	∞	0	2		16	27	∞	0	9
3	16	27	0	∞		17	3	29	∞	0
4	17	3	∞	0		0	0	∞	0	∞

Найдем в установленном порядке константы приведения матриц 8 и 9. Они равны соответственно $L^1_{53}=3; L^1_{\overline{53}}=10$. Нижние же границы гамильтоновых контуров подмножеств $\Omega^1{}_{53}$ и $\Omega^1{}_{\overline{53}}$ будут равны: $\varphi^1_{53}=\varphi^0+L^1_{53}=42+3=45;$ $\varphi^1_{53}=\varphi^0+L^1_{53}=42+10=52.$ В таблицах 8а и 9а представлен вид этих матриц после приведения.

Таблица 8а						Таблица 9а				
i / j	1	2	4	5		∞	22	33	9	0
1	∞	19	9	0		0	∞	0	0	2

2	0	∞	0	2		16	27	∞	0	9
3	16	24	0	∞		17	3	19	∞	0
4	17	0	∞	0		0	0	∞	0	∞

Ввиду того, что $\varphi^1_{53} < \varphi^1_{\overline{53}}$, дальнейшему ветвлению подвергается подмножество $\Omega^1{}_{53}$, содержащее дугу (5-3) с помощью уже использованных приемов. В матрице таблицы 8а отыскивается элемент с максимальной степенью нуля. Это элемент C''_{42} с максимальной степенью нуля $\theta_{42} = 19$, поэтому ветвление подмножества $\Omega^1{}_{53}$ осуществляется по признаку вхождения (или не вхождения) в гамильтонов контур дуги, идущий из четвертой вершины во вторую. Это второй этап ветвления, и получаемые подмножества обозначаются Ω^2_{42} и $\Omega^2_{\overline{42}}$. В таблицах 10 и 11 приведены матрицы этих подмножеств. Они получены из матрицы таблицы 8а по тому же правилу, что матрицы таблиц 8 и 9 из матрицы таблицы 7с.

Таблица 10					Таблица 11			
i / *j*	1	4	5		∞	19	9	0
1	∞	9	0		0	∞	0	2
2	0	0	2		16	24	0	∞
3	16	0	∞		17	∞	∞	0

Константы приведения матриц таблиц 10 и 11 равны соответственно $L^2_{42} = 0$ и $L^2_{\overline{42}} = 19$. Отсюда нижние границы гамильтоновых контуров подмножеств Ω^2_{42} и $\Omega^2_{\overline{42}}$ будут равны $\varphi^2_{42} = \varphi^1_{53} + L^2_{42} = 45 + 0 = 45$ и $\varphi^2_{\overline{42}} = \varphi^1_{53} + L^2_{\overline{42}} = 45 + 19 = 64$. Поскольку $\varphi^2_{42} < \varphi^2_{\overline{42}}$ дальнейшему ветвлению подлежит подмножество Ω^2_{42}. Максимальные степени нулевых элементов матрицы таблицы 10 реализуются на элементах C''_{21} и C''_{34} и равны $\theta_{21} = \theta_{34} = 16$. Выбираем любой из них, например, C''_{34} и разбиваем подмножество Ω^2_{42} по признаку наличия (или отсутствия) в гамильтоновом контуре дуги (3-4). Матрицы подмножеств Ω^3_{34} и $\Omega^3_{\overline{34}}$ приведены в таблицах 10a и 10b, полученных их таблицы 10.

Таблица 10a			Таблица 10b		
i / j	1	5	∞	9	0
1	∞	0	0	0	2
2	0	2	16	∞	∞

Константы приведения матриц таблиц 10a и 10b равны соответственно $L^3_{34} = 0,\ L^3_{\overline{34}} = 16$, следовательно, дальнейшему ветвлению подвергается подмножество Ω^3_{34}. Но т.к. его матрица имеет размерность 2×2, в гамильтонов контур включаются дуги, соответствующие оставшимся нулевым элементам C''_{15} и C''_{21}, т.е. идущие из первой вершины в пятую и из второй в первую. Перечислим найденные дуги в том порядке, в котором они были обнаружены в процессе ветвления: (5-3), (4-2), (3-4), (1-5), (2-1). На рис. 3.2 представлен гамильтонов путь, который может быть построен на графе задачи примера 11. Протяженность этого пути, реализующего точное решение задачи коммивояжера, равна: $Z(x^*) = C_{53} + C_{34} + C_{42} + C_{21} + C_{15} = 8 + 2 + 15 + 9 + 11 = 45.$

В терминах условия примера 11 это означает, что сначала в производство запускается 5-я деталь, потом 3-я, потом 4-я, потом 2-я, потом 1-я.

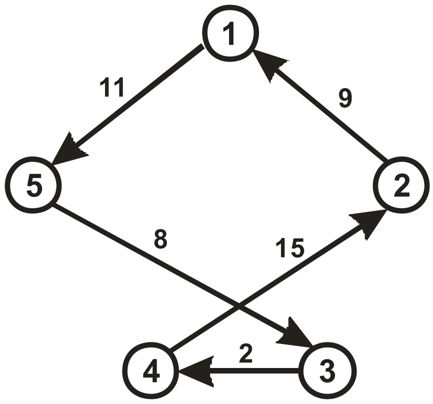


Рис. 3.2. Гамильтонов путь

Замечание. Задача коммивояжера может быть легко переформулирована на отыскание максимума, например, прибыли, или любого другого критерия эффективности и решена с помощью алгоритма Литтла. При этом максимум целевой функцией достигается на том же плане перемещений, что и минимум классической задачи коммивояжера.

3.5. Решение задач с помощью Excel «Поиск решения»

Для решения задачи ЦЛП с помощью оптимизатора Excel «Поиск решения» достаточно добавить к обычным ограничениям задачи еще одно требование – условие целочисленности переменных. Рассмотрим процесс подготовки и решения задачи ЦЛП на следующем примере.

Пример. Минимизировать функцию $f(\bar{x}) = x_1 - x_2 - 3x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5, \end{cases}$$

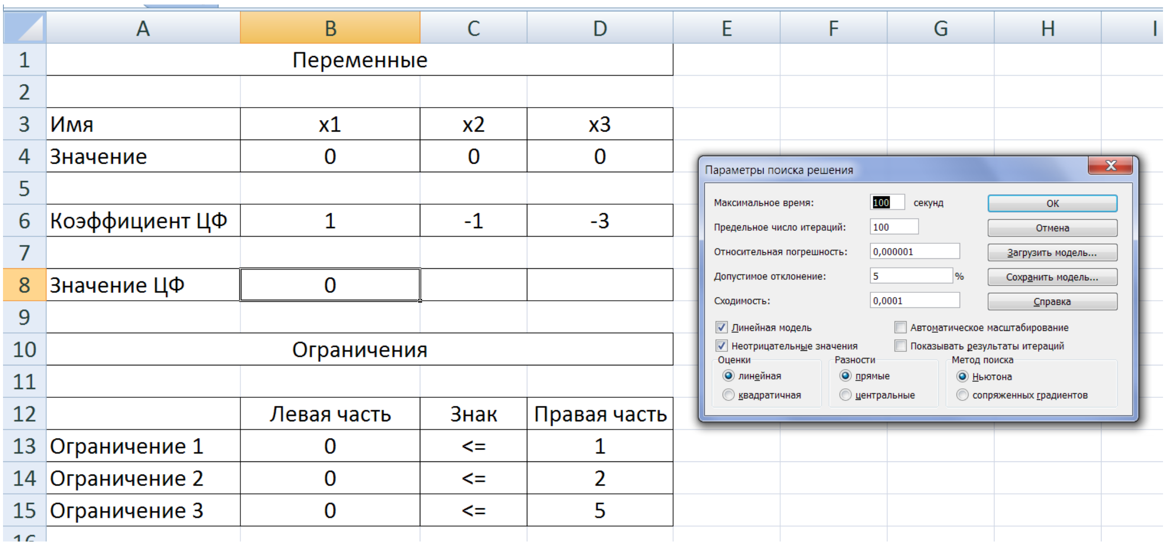
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0, \quad \textit{целые}$$

Табличное представление примера в режиме отображения формул представимо на рис. 3.3. Для изменяемых значений x_1, x_2, x_3 выделены ячейки B4:D4. В ячейках B6:D6 заданы коэффициенты целевой функции, а ячейка B8 зарезервирована для нахождения минимального значения целевой функции. В диапазоне B13:D15 заданы коэффициенты, знаки и правые части ограничений.

	A	B	C	D
1	Переменные			
2				
3	Имя	x1	x2	x3
4	Значение	0	0	0
5				
6	Коэффициент ЦФ	1	-1	-3
7				
8	Значение ЦФ	=B4-C4-3*D4		
9				
10	Ограничения			
11				
12		Левая часть	Знак	Правая часть
13	Ограничение 1	=2*B4-C4+D4	<=	1
14	Ограничение 2	=-4*B4+2*C4-D4	<=	2
15	Ограничение 3	=3*B4+D4	<=	5

Рис. 3.3.

В диалоговом окне **Поиск решения** вводим **Параметры поиска решения**, указываем какие ячейки изменять (**Изменяя ячейки**), устанавливаем ограничения, вводим ограничения, указываем целевую функцию (рис. 3.4).



	A	B	C	D
1	Переменные			
2				
3	Имя	x1	x2	x3
4	Значение	0	0	0
5				
6	Коэффициент ЦФ	1	-1	-3
7				
8	Значение ЦФ	0		
9				
10	Ограничения			
11				
12		Левая часть	Знак	Правая часть
13	Ограничение 1	0	<=	1
14	Ограничение 2	0	<=	2
15	Ограничение 3	0	<=	5

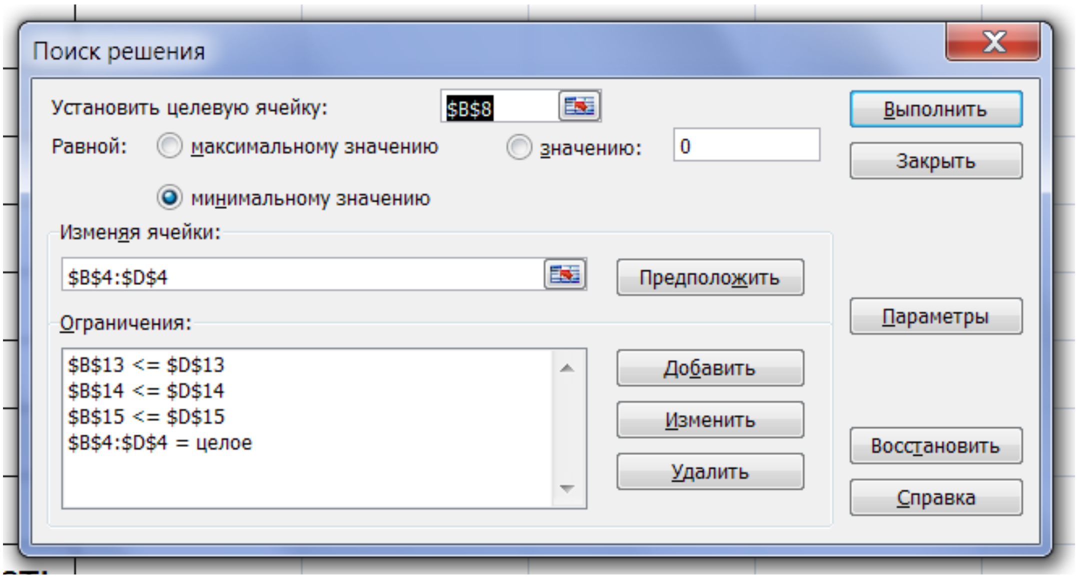


Рис. 3.4.

После нажатия кнопки **Выполнить** получаем оптимальное решение задачи (рис. 3.5) .

	A	B	C	D
1	Переменные			
2				
3	Имя	x1	x2	x3
4	Значение	0	3	4
5				
6	Коэффициент ЦФ	1	-1	-3
7				
8	Значение ЦФ	-15		
9				
10	Ограничения			
11				
12		Левая часть	Знак	Правая часть
13	Ограничение 1	1	<=	1
14	Ограничение 2	2	<=	2
15	Ограничение 3	4	<=	5
16				

Рис. 3.5.

Из рисунка 3.5 видно, что $\overline{x}^* = (x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 4);\quad f_{\min} = -15.$

3.6. База вопросов для тестового контроля

Комментарий. Сложность (трудоемкость в минутах / работы) теста. Т оценивается экспертом, т.е. устанавливается за сколько минут непрерывной работы эксперт способен ответить на все вопросы теста. Методика оценки следующая:

1. Оценивается трудоемкость ответа эксперта на один вопрос из теста, например, ему требуется 1 (мин/раб).

2. Тест, например, содержит 5 вопросов, случайным образом отобранных из базы вопросов, тогда S(T) = 5.

3. «Среднестатистическому» студенту для ответа, в целом, на тест требуется в 3 раза больше (мин/раб). Исходя из этого, на тест необходимо отпустить 15 (мин/раб).

Тест 3. Вопросы для оценки качества полноты (POL) усвоенных знаний (модуль 3)

1. Какие из перечисленных задач относятся к задачам целочисленного программирования ?

*a) ЗЛП, в которых на переменные наложено дополнительное условие целочисленности;

b) ЗЛП, в состав целевых функций которых входят только целые неотрицательные коэффициенты;

c) ЗЛП, матрицы ограничений которых не содержит дробных элементов.

2. Какие значения могут принимать переменные в задаче о назначениях?

a) любые целочисленные значения кроме нуля;

b) любые неотрицательные целочисленные значения;

*c) либо ноль, либо единица.

3. Как осуществляется построение правильного отсечения при реализации алгоритма Гомори?

*a) в состав ЗЛП вводится ещё одного ограничения;

b) в состав ЗЛП вводится ещё два ограничения;

c) из состава ЗЛП выводится какая-либо из свободных переменных.

4. Какой путь на графе называется гамильтоновым?

a) замкнутый путь, включающий в себя все дуги графа;

*b) замкнутый путь, в котором все вершины, кроме исходной, встречаются один и только один раз;

c) любой замкнутый путь на графе.

5. С помощью какого метода может быть получено приближенное решение задачи коммивояжера?

*a)метода ближайшего соседа;

b) метода случайных направлений;

c) симплекс-метода.

6. Какие из определений верно характеризуют матрицу перемещений в задаче коммивояжера?

*a) квадратная;

b) симметричная;

c) невырожденная;

*d) неотрицательная.

7. Чему равна мантисса числа - 3,6?

a) 0,6;

b) -0,6;

*c) 0,4.

8. Чему равна мантисса числа - 7,1?

* a) 0,9;

b) 0,1

c) -0,9.

9. Если при решении задачи целочисленного программирования с помощью алгоритма Гомори отсечение окажется нелинейным то:

a) решение задачи получено;

*b) такого не может быть;

c) ничего особенного это не означает.

10. Укажите определения, верно характеризующие правильное отсечение.

a) оно отсекает все нецелочисленные решения;

*b) оно отсекает только нецелочисленные решения;

*c) оно не отсекает ни одного целочисленного решения.

Тест 3. Вопросы для оценки качества целостности (CHL) усвоенных знаний (модуль3)

11. По какой координате строится правильное отсечение при реализации алгоритма Гомори?

*a) по базисной координате, имеющей наибольшую дробную часть;

b) по базисной координате, имеющей наименьшую дробную часть;

c) по любой небазисной координате.

12. Как получить из матрицы перемещений задачи коммивояжера матрицу, приведённую по строкам?

a) путем вычитания из каждого элемента строки минимального элемента этой строки;

*b) путем вычитания из каждого элемента строки максимального элемента этой строки;

c) путем удаления из матрицы коммивояжера строк с максимально и минимальной суммой элементов.

13. Что называется степенью нулевого элемента приведённой матрицы коммивояжера?

*a) сумма минимальных элементов строки и столбца, на пересечении которых находится нулевой элемент;

b) сумма максимальных элементов строки и столбца, на пересечении которых находится нулевой элемент;

c) количество нулей в строке и столбце, на пересечении которых находится нулевой элемент.

14. Чему равна точная нижняя граница длин гамильтоновых контуров графа, задаваемого матрицей коммивояжера:

a) сумме степеней нулевых элементов приведенной матрицы коммивояжера;

b) величине определителя матрицы коммивояжера.

*c) константе приведения матрицы коммивояжера.

15. Когда значение целевой функции на оптимальном плане задачи целочисленного программирования может оказаться не целым числом?

a) этого не может быть;

b) когда один из столбцов технологической матрицы полностью состоит из не целых чисел;

*c) когда хотя бы один из коэффициентов целевой функции является не целым числом.

16. Найдите решение задачи коммивояжера с нижеприведенной матрицей перемещений методом ближайшего соседа, при условии, что начало и окончание маршрута находятся в первом пункте.

$$\begin{pmatrix} \infty & 14 & 6 & 12 \\ 15 & \infty & 9 & 17 \\ 11 & 20 & \infty & 19 \\ 14 & 4 & 13 & \infty \end{pmatrix}$$

*a) 43; b) 30; c) 39.

17. Найдите решение задачи коммивояжера с нижеприведенной матрицей перемещений методом ближайшего соседа, при условии, что начало и окончание маршрута находятся в четвертом пункте.

$$\begin{pmatrix} \infty & 19 & 8 & 14 \\ 15 & \infty & 9 & 17 \\ 16 & 20 & \infty & 7 \\ 14 & 6 & 13 & \infty \end{pmatrix}$$

a) 30; *b) 45; c) 51

18. Найдите константу приведения задачи коммивояжера с матрицей перемещений

$$\begin{pmatrix} \infty & 19 & 8 & 14 \\ 15 & \infty & 9 & 17 \\ 16 & 20 & \infty & 7 \\ 14 & 6 & 13 & \infty \end{pmatrix}$$

*a) 36; b) 30; c) 46.

19. Найдите константу приведения задачи коммивояжера с матрицей перемещений

$$\begin{pmatrix} \infty & 14 & 6 & 12 \\ 15 & \infty & 9 & 17 \\ 11 & 20 & \infty & 19 \\ 14 & 4 & 13 & \infty \end{pmatrix}$$

a) 30: b) 28; *c) 36.

20. Из какого пункта следует начинать движение при решении задачи коммивояжера методом ближайшего соседа для получения маршрута минимальной протяженности?

a) из пункта, которому в матрице перемещений соответствует строка с минимальной суммой элементов;

b) из пункта, которому в матрице перемещений соответствует строка с максимальной суммой элементов;

*c) рекомендаций по выбору начального пункта не существует.

3.7. База учебных проблем и задач

Комментарий. Сложность (трудоемкость в минутах / работы) задачи X оценивается экспертом, т.е. за сколько минут непрерывной работы эксперт способен решить эту задачу. Например, эксперт способен решить задачу X за 15 (мин/раб). Будем считать, что сложность задачи X равной S(X) = 15. Как следует из статистических данных, «среднему» студенту для решения задачи X требуется в 5 раз больше мин/раб, поэтому ему отпускается 75 (мин/раб).

Блок задач 1

№ 1. Найти все оптимальные целочисленные решения методом ветвей и границ.

$$Z = max(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 2. Найти все оптимальные целочисленные решения методом ветвей и границ.

$$Z = max(x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 16, \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 3. Найти все оптимальные целочисленные решения методом ветвей и границ.

$$Z = max(3x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 4. Найти все оптимальные целочисленные решения методом ветвей и границ.

$$Z = max(3x_1 + 3x_2 + 13x_3)$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 8, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 5. Найти оптимальные целочисленные решения задач с помощью метода отсечения.

$$Z = max(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 6. Найти оптимальные целочисленные решения задач с помощью метода отсечения.

$$Z = max(7x_1 + 9x_2)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 7x_1 + x_2 \le 35 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15.

№ 7. Найти оптимальные целочисленные решения задач с помощью метода отсечения.

$$Z = max(x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15

№ 8. Найти оптимальные целочисленные решения задач с помощью метода отсечения.

$$Z = max(7x_1 + 9x_2)$$

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 \le 36, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15

№ 9. Найти оптимальные целочисленные решения задач с помощью метода отсечения.

$$Z = max(3x_1 + 5x_2)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 16, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15

№ 10. Найти оптимальные целочисленные решения задач с помощью метода отсечения.

$$Z = max(2x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 22, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15

№ 11. Найти оптимальные целочисленные решения задач с помощью метода отсечения.

$$Z = max(3x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(11)=15

№ 12. Найти оптимальные целочисленные решения задач с помощью метода отсечения.

$$Z = max(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 21, \\ -x_1 + 3x_2 \le 8, \\ x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(1)=15

Блок задач 2

№ 1. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало с первого пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 15 & 4 & 8 & 11 & 18 \\ 10 & \infty & 19 & 22 & 7 & 13 \\ 3 & 17 & \infty & 15 & 12 & 20 \\ 16 & 24 & 14 & \infty & 25 & 6 \\ 31 & 5 & 17 & 13 & \infty & 15 \\ 27 & 19 & 12 & 8 & 22 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

№ 2. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало со второго пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 15 & 4 & 8 & 11 & 18 \\ 10 & \infty & 19 & 22 & 7 & 13 \\ 3 & 17 & \infty & 15 & 12 & 20 \\ 16 & 24 & 14 & \infty & 25 & 6 \\ 31 & 5 & 17 & 13 & \infty & 15 \\ 27 & 19 & 12 & 8 & 22 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

№ 3. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало с третего пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 15 & 4 & 8 & 11 & 18 \\ 10 & \infty & 19 & 22 & 7 & 13 \\ 3 & 17 & \infty & 15 & 12 & 20 \\ 16 & 24 & 14 & \infty & 25 & 6 \\ 31 & 5 & 17 & 13 & \infty & 15 \\ 27 & 19 & 12 & 8 & 22 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

№ 4. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало с четвертого пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 15 & 4 & 8 & 11 & 18 \\ 10 & \infty & 19 & 22 & 7 & 13 \\ 3 & 17 & \infty & 15 & 12 & 20 \\ 16 & 24 & 14 & \infty & 25 & 6 \\ 31 & 5 & 17 & 13 & \infty & 15 \\ 27 & 19 & 12 & 8 & 22 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

№ 5. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало с пятого пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 15 & 4 & 8 & 11 & 18 \\ 10 & \infty & 19 & 22 & 7 & 13 \\ 3 & 17 & \infty & 15 & 12 & 20 \\ 16 & 24 & 14 & \infty & 25 & 6 \\ 31 & 5 & 17 & 13 & \infty & 15 \\ 27 & 19 & 12 & 8 & 22 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

№ 6. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало с шестого пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 15 & 4 & 8 & 11 & 18 \\ 10 & \infty & 19 & 22 & 7 & 13 \\ 3 & 17 & \infty & 15 & 12 & 20 \\ 16 & 24 & 14 & \infty & 25 & 6 \\ 31 & 5 & 17 & 13 & \infty & 15 \\ 27 & 19 & 12 & 8 & 22 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

№ 7. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало с первого пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 16 & 21 & 2 & 17 \\ 13 & \infty & 21 & 15 & 43 & 23 \\ 25 & 3 & \infty & 31 & 17 & 9 \\ 13 & 10 & 27 & \infty & 33 & 12 \\ 9 & 2 & 19 & 14 & \infty & 51 \\ 42 & 17 & 5 & 9 & 23 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

№ 8. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало со второго пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 16 & 21 & 2 & 17 \\ 13 & \infty & 21 & 15 & 43 & 23 \\ 25 & 3 & \infty & 31 & 17 & 9 \\ 13 & 10 & 27 & \infty & 33 & 12 \\ 9 & 2 & 19 & 14 & \infty & 51 \\ 42 & 17 & 5 & 9 & 23 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

№ 9. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало с третего пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 16 & 21 & 2 & 17 \\ 13 & \infty & 21 & 15 & 43 & 23 \\ 25 & 3 & \infty & 31 & 17 & 9 \\ 13 & 10 & 27 & \infty & 33 & 12 \\ 9 & 2 & 19 & 14 & \infty & 51 \\ 42 & 17 & 5 & 9 & 23 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

№ 10. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало с четвертого пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 16 & 21 & 2 & 17 \\ 13 & \infty & 21 & 15 & 43 & 23 \\ 25 & 3 & \infty & 31 & 17 & 9 \\ 13 & 10 & 27 & \infty & 33 & 12 \\ 9 & 2 & 19 & 14 & \infty & 51 \\ 42 & 17 & 5 & 9 & 23 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

№ 11. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало с пятого пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 16 & 21 & 2 & 17 \\ 13 & \infty & 21 & 15 & 43 & 23 \\ 25 & 3 & \infty & 31 & 17 & 9 \\ 13 & 10 & 27 & \infty & 33 & 12 \\ 9 & 2 & 19 & 14 & \infty & 51 \\ 42 & 17 & 5 & 9 & 23 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

№ 12. Найти приближенное решение задачи коммивожера методом ближайшего соседа (начало с шестого пункта).

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 16 & 21 & 2 & 17 \\ 13 & \infty & 21 & 15 & 43 & 23 \\ 25 & 3 & \infty & 31 & 17 & 9 \\ 13 & 10 & 27 & \infty & 33 & 12 \\ 9 & 2 & 19 & 14 & \infty & 51 \\ 42 & 17 & 5 & 9 & 23 & \infty \end{pmatrix}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=15

Блок задач 3

№ 1. Найти все оптимальные целочисленные решения помощью *пакета Ms Excel*.

$$Z = max(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15

№ 2. Найти все оптимальные целочисленные решения помощью *пакета Ms Excel.*

$$Z = max(x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 16, \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ x_j \geq 0, \; j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15.

№ 3. Найти все оптимальные целочисленные решения помощью *пакета Ms Excel*.

$$Z = max(3x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15.

№ 4. Найти все оптимальные целочисленные решения помощью *пакета Ms Excel*.

$$Z = max(3x_1 + 3x_2 + 13x_3)$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 8, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8, \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15.

№ 5. Найти оптимальные целочисленные решения задач помощью *пакета Ms Excel.*

$$Z = max(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15.

№ 6. Найти оптимальные целочисленные решения задач помощью *пакета Ms Excel*.

$$Z = max(7x_1 + 9x_2)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15.

№ 7. Найти оптимальные целочисленные решения задач помощью *пакета Ms Excel*.

$$Z = max(x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15.

№ 8. Найти оптимальные целочисленные решения задач помощью *пакета Ms Excel*.

$$Z = max(7x_1 + 9x_2)$$

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 \le 36, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15.

№ 9. Найти оптимальные целочисленные решения задач помощью *пакета Ms Excel*.

$$Z = max(3x_1 + 5x_2)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 16, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15.

№ 10. Найти оптимальные целочисленные решения задач помощью *пакета Ms Excel*.

$$Z = max(2x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 22, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15.

№ 11. Найти оптимальные целочисленные решения задач помощью *пакета Ms Excel*.

$$Z = max(3x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15.

№ 12. Найти оптимальные целочисленные решения задач помощью *пакета Ms Excel*.

$$Z = max(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 21, \\ -x_1 + 3x_2 \le 8, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(3)=15.

Блок задач повышенной сложности

№ 1. Найти все оптимальные целочисленные решения методом ветвей и границ.

$$Z = max(-2x_1 - x_2 + x_3 + x_4)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(0)=25.

№ 2. Найти оптимальные целочисленные решения задач с помощью метода отсечения.

$$Z = max(3x_1 + x_2 + 3x_3)$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 4x_2 - 3x_3 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 3, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(0)=60.

№ 3. Найти оптимальные целочисленные решения задач с помощью метода отсечения.

$$Z = max(7x_1 + 8x_2 + 6x_3)$$
$$\begin{cases} 9x_1 + 9x_2 + 2x_3 \le 180, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 120, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 220, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Время, достаточное для решения экспертом, S(0)=60.

№ 4. Для производства шкафов и спальных гарнитуров мебельная фабрика использует три вида древесины, запасы которой составляют 48 м^3, 16 м^3 50 м^3 соответственно. Для изготовления одного шкафа требуется древесины первого вида 1,2 м^3, древесины второго вида 0,6 м^3, а древесина третьего вида в производстве шкафов не применяется.

Для изготовления одного спального гарнитура требуется древесины первого вида 0,8 м^3, древесины второго вида 0,2 м^3, древесины третьего вида 1 м^3. Прибыль от реализации одного шкафа составляет 6000 ден. ед., а от реализации одного спального гарнитура 12000 ден. ед. Найти оптимальный план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль, при условии, что количество произведенных шкафов и спальных гарнитуров может выражаться только целыми числами. (Указание: целочисленное решение получить с помощью метода отсечения)

Время, достаточное для решения экспертом, S(0)=45.

№ 5. Для оформления рекламного щита предполагается использовать пять различных красок: 1 – красную; 2 – синюю; 3 – зеленую; 4 – черную; 5 – белую. Порядок нанесения красок значения не имеет, однако в соответствии с технологией окрашивания между нанесением различных красок должно пройти время не менее некоторого, вполне определенного, промежутка. Эти временные интервалы приведены в матрице, элементами которой являются длины временных интервалов в часах, которые должны выдерживаться в процессе покрытия.

$$\begin{pmatrix} \infty & 5 & 17 & 13 & 21 \\ 7 & \infty & 2 & 11 & 8 \\ 14 & 25 & \infty & 16 & 32 \\ 20 & 18 & 4 & \infty & 12 \\ 24 & 9 & 28 & 21 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1 - \textit{крс.} \\ 2 - \textit{син.} \\ 3 - \textit{зел.} \\ 4 - \textit{чер.} \\ 5 - \textit{бел.} \end{array}$$

Методом ближайшего соседа найти последовательность окрашивания и время, затрачиваемое на оформление щита, если первой наносится красная краска и если первой наносится синяя краска; с помощью алгоритма Литтла определить оптимальную последовательность нанесения красок, при которой на оформление щита затрачивается минимальное время, и установить чему это время будет равно. Построить граф перемещений.

Время, достаточное для решения экспертом, S(0)=45.

№ 6. С помощью алгоритма Литтла найти точное решение задачи коммивояжера, матрица перемещений которой имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 16 & 21 & 2 & 17 \\ 13 & \infty & 21 & 15 & 43 & 23 \\ 25 & 3 & \infty & 31 & 17 & 9 \\ 13 & 10 & 27 & \infty & 33 & 12 \\ 9 & 2 & 19 & 14 & \infty & 51 \\ 42 & 17 & 5 & 9 & 23 & \infty \end{pmatrix}$$

Построить граф перемещений.

Время, достаточное для решения экспертом, S(0)=50.

Раздел 4. Нелинейное программирование

Очевидно, что любая математическая модель представляет собой некоторую идеализацию моделируемого объекта, уровень которой определяется требованиями, предъявляемыми к модели, и особенностями самого объекта. В подавляющем большинстве случаев тип связей между переменными, характеризующими существенные особенности объекта, не линеен. В каких-то моделях можно с успехом использовать их линейные приближения. Неизбежные при этом потери в точности описания окупаются простотой получения решения и интерпретации полученных результатов.

Однако существуют задачи, для которых линеаризация связей совершенно неприемлема, так как чревата потерей содержательного смысла.

Задачи условной оптимизации и, в частности, задачи нелинейного программирования известны очень давно, задолго до того, как они получили современное название. Объясняется это их практической востребованностью. Действительно, задача отыскания максимума (минимума) некоторой функции многих переменных в условиях ограничений, которые на эти переменные наложены, имеет огромное прикладное значение. Экономика, техника, строительство, военное планирование и многое другое, где необходимо отыскать наилучшее решение при ограниченных ресурсах являются полем приложения этих задач.

Одной из самых древних задач нелинейного программирования считается задача Дидоны. Согласно легенде эта задача связана с основанием города Карфагена. Дидона была сестрой царя финикийского города Тира. Она переселилась на африканском побережье Средиземного моря, где попросила у местного племени участок земли, которую можно охватить шкурой быка. Местное племя дало ей шкуру, которую она разрезала на узенькие ремни и их связала. Лентой, которая получилась в результате, она охватила территорию у побережья. Длина ленты оказалась весьма внушительной. Площадь участка, границы которого были отмечены с помощью этой ленты, позволило Дидоне и ее товарищам вполне комфортно обустроиться на новом месте и основать один из крупнейших городов древнего мира.

К сожалению, не известно ни чему была равна длина ленты, ни какую форму имел участок. Документальные свидетельства за давностью лет не сохранились, а Карфаген был стерт с лица земли римскими солдатами в середине второго века до н.э. Но осталась задача о нахождении максимальной площади плоской фигуру заданной формы с известной длиной периметра, названная именем царицы Дидоны.

Рассмотрим задачу Дидоны в простейшей постановке, предположив, что участок имеет форму прямоугольника, одна из сторон которого обращена к морю, а береговая линия в пределах участка не имеет изгибов, заливов и т.п. (рис. 1).

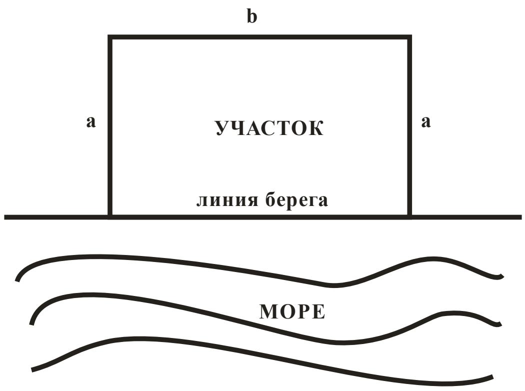


Рис. 4.1. Модель участка Дидоны

Из рисунка видно, что фактически нам надо установить в каком отношении друг к другу должны находиться стороны прямоугольника *a* и *b*, чтобы площадь его была наибольшей при условии, что длина периметра равна длине ленты ℓ, которая является известной. Площадь прямоугольника *S* вычисляется как произведение его сторон, т.е. есть функция двух переменных: длины *b* и ширины *a*. Таким образом, нашей целью будет отыскание *maxS=ab*. Так как лента используется только для обозначения границ береговой части участка, то $\ell = 2a + b$. Выражая отсюда одну из сторон, получим $b = \ell - 2a$. Если это выражение подставить в формулу для вычисления площади она примет вид $\max S = a(\ell - 2a)$, а после раскрытия скобок $\max S = a\ell - 2a^2$. Площадь S в этом выражении есть функция одной переменной а и, используя необходимое условие существования экстремума, легко найти значение а, при котором S (площадь) достигает своего максимального значения. Для этого находим производную S как функцию от a и приравниваем ее к нулю.

$$\frac{dS}{da} = \ell - 4a = 0.$$

Решая полученное уравнение находим $a = \frac{\ell}{4}$. Поскольку $\ell = 2a + b$ (см. рис. 4.1), то, очевидно, $b = \frac{\ell}{2}$, откуда следует, что $b = 2a$. Таким образом, установлено, что для того, чтобы участок прямоугольной формы, прилегающий к морю, имел наибольшую площадь при заданной протяженности наземного ограждения, его стороны, перпендикулярные береговой линии, должны быть вдвое меньше стороны, идущей вдоль берега. Подставив найденные значения $a = \frac{\ell}{4}$ и $b = \frac{\ell}{2}$ в формулу для вычисления площади прямоугольника найдем величину максимально возможной площади

$$S_{\max} = \frac{\ell}{4} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\ell^2}{8}.$$

В целом, очевидна необходимость изучения нелинейных моделей и методов их анализа, хотя они существенно сложнее линейных. Выясним, чем же определяется эта сложность.

4.1. Инструкция к организации учебной работы (раздел 4)

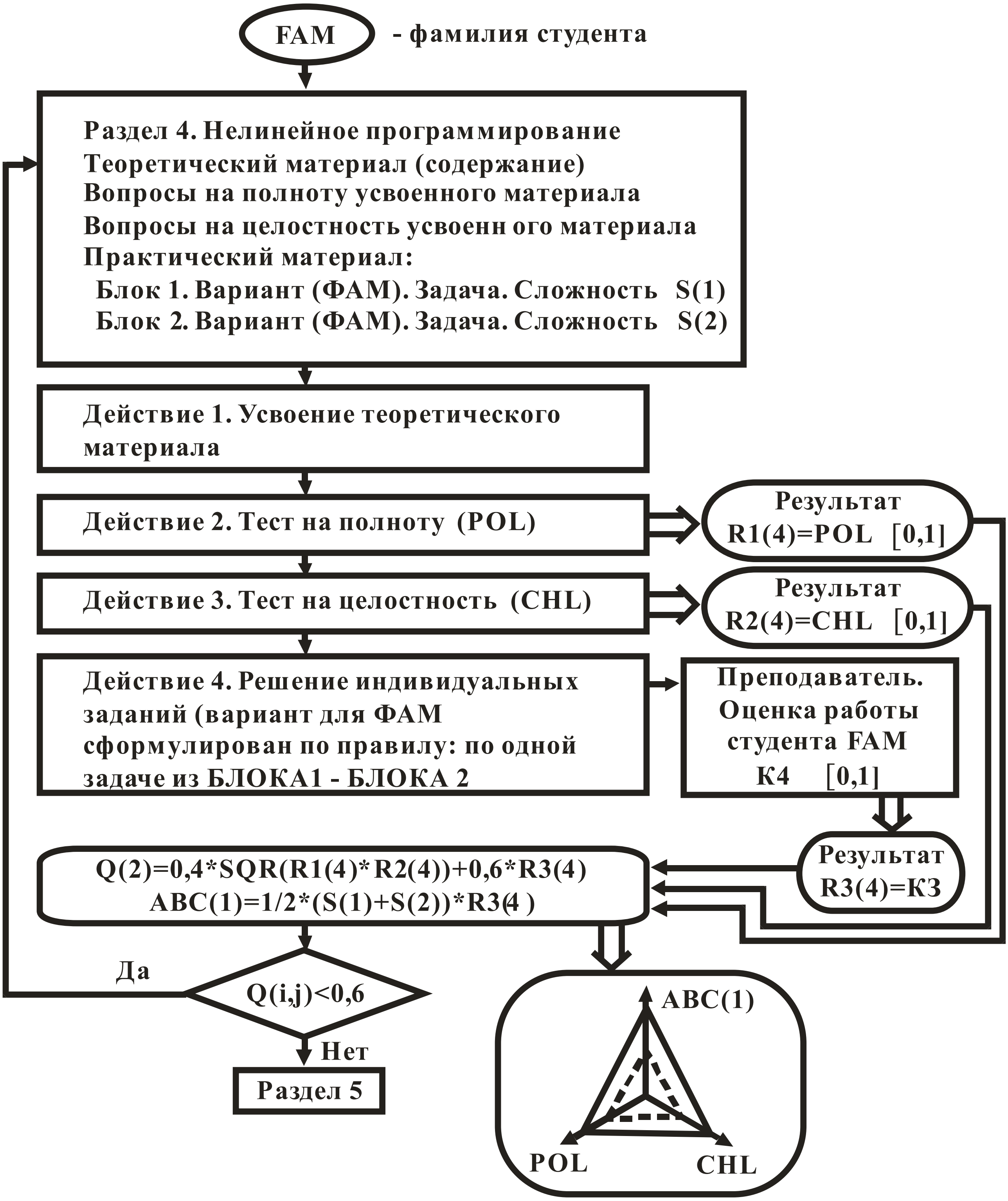


Рис. 4.2. Схема организации подготовки

4.2. Задача нелинейного программирования

В самом общем виде задача нелинейного программирования состоит в отыскании sup $f(x)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$, при условии, что x

ϵ ***X***. ***X*** – некоторое непустое подмножество n – мерного евклидова пространства. Так как в подавляющем большинстве практических задач исследования операций точная верхняя грань достижима, будем отыскивать не sup $f(x)$, а $max\ f(x)$. Так же без потери общности постановки можно считать, что $\boldsymbol{X} = \{x|x \in R^n,\ g_i(x) \geq 0,\ i = 1{,}m\}$. Проблемы могут возникнуть уже на стадии постановки задачи, поскольку вид множества ***X*** часто оказывается таким, что исключает возможность применения какого-либо метода поиска кроме может быть, метода случайного перебора. Вообще для задач нелинейного программирования характерно чрезвычайное разнообразие структуры и, отчасти, именно поэтому до настоящего времени не известен универсальный метод их решения такой, как симплекс-метод для ЗЛП. Выбор наиболее приемлемого метода решения конкретной задачи нелинейного программирования является отдельной и отнюдь не простой проблемой, поскольку эффективность известных методов решения существенно зависит от вида целевой функции, особенностей множества ***X***, и размерности задачи. Ещё одним аспектом сложности оказывается то, что не всегда просто (в отличие от ЗЛП) дать содержательную физическую или экономическую интерпретацию полученных результатов. Это происходит, в частности, когда целевая функция не является унимодальной, то есть имеет несколько экстремумов, или обладает особенностями в виде разрывов, бифуркаций и т.п.

4.3. Седловые точки и их свойства

Понятие седловой точки имеет чрезвычайно важное значение во многих разделах исследования операций и определяется следующим образом.

Определение. Пара (x^0, y^0) называется седловой точкой функции $F(x,y)$ на декартовом произведении множеств $X \times Y$, если

$F(x,y^0) \le F(x^0,y^0) \le F(x^0,y)$ для $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$, или $\max\limits_{x \in X} F(x,y^0) = F(x^0,y^0) = \min\limits_{y \in Y} F(x^0,y)$

Предполагается, что переменные x и y есть векторы n-мерного и m-мерного пространства соответственно. Содержательный смысл понятия седловой точки очевиден: по одной группе переменных функция F в этой точке достигает максимума, а по другой группе переменных минимума. Классическим примером поверхности в трехмерном пространстве, обладающей седловой точкой, является обычное кавалерийское седло, откуда, собственно, произошел и сам термин. Если функция $F(x,y)$ дифференцируема по всем входящим в её состав переменным, а точка (x^0,y^0) есть внутренняя точка произведения $X \times Y$, то необходимым условием того, что это действительно седловая точка является система равенств

$$\frac{\partial F(x^0,y^0)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x^0,y^0)}{\partial y_i} = 0 \qquad j = \overline{1,n}\ ;\ i = \overline{1,m}.$$

Разумеется, что среди решений этой системы могут быть (кроме седловых) любые другие критические точки функции F.

Найдем сначала минимум функции $F(x,y)$ по y, а затем максимум от полученного результата. Выполнив первое из заявленных действий, получим некоторую функцию $\varphi(x) = \min\limits_{y \in Y} F(x,y)$ и далее $\alpha = \max\limits_{x \in X} \varphi(x) = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} F(x,y)$. Эта величина называется <u>максимином</u> функции F(x,y). Выполняя отыскание максимума и минимума этой же функции в обратном порядке: $\omega = \min\limits_{y \in Y} \psi(y) = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} F(x,y)$, где $\psi(y) = \max\limits_{x \in X} F(x,y)$ получим величину, называемую <u>минимаксом</u> функции $F(x,y)$.

<u>Замечание</u>. Поскольку для функций общего вида, определенных на множествах произвольного типа, верхняя и нижняя грани могут не достигаться, находятся величины $\sup \inf F(x,y)$ и $\inf \sup F(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Далее при изложении материала мы будем

использовать более привычные понятия максимума и минимума, предполагая их достижимость.

Интуитивно ясно и может быть строго доказано, что для любой функции максимин не может превосходить минимакса. Если же в какой либо точке (x^0,y^0) окажется, что $\alpha = \omega$, то эта точка является седловой для функции $F(x,y)$. Это положение так же можно строго доказать, поэтому оно известно как теорема о необходимом и достаточном условии существования седловой точки.

Теорема. Для того, чтобы функция $F(x,y)$ имела седловую точку на прямом произведении $X \times Y$, необходимо и достаточно выполнения равенства:

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y} F(x,y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} F(x,y).$$

Введенные понятия позволяют указать связь между решением задач нелинейного программирования и седловыми точками. Вернемся к поставленной задаче нелинейного программирования: найти max $f(x)$ при условии, что $x \in X$, а множество X может быть задано системой неравенств $g_i(x) \geq 0, \quad i = \overline{1,m}$ Или найти $min\ f(x)$ при ограничениях $g_i(x) \leq 0$. Сформируем для этой задачи ортант евклидова пространства $\boldsymbol{R}^m$, и, предполагая, что максимин функции $\boldsymbol{F}(x,y)$ существует, найдем $\alpha = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} F(x,y)$.

Теорема. О связи седловой точки с решением задачи нелинейного программирования. Если (x^0,y^0) седловая точка функции Лагранжа $F(x,y) = f(x) + \langle y, g(x) \rangle$ на прямом произведении $X \times Y$, то точка $x^0 \epsilon X$, будет решением задачи нелинейного программирования.

Пусть (x^0, y^0)- седловая точка функции Лагранжа. Тогда, по определению, справедливы неравенства:

$$f(x^0) + \langle y^0, g(x^0) \rangle \leq f(x) + \langle y^0, g(x) \rangle \quad и \quad f(x^0) + \langle y, g(x^0) \rangle \leq$$
$$\leq f(x^0) + \langle y^0, g(x^0) \rangle$$

Из второго неравенства следует, что $\left\langle (y^0 - y), g(x^0)\right\rangle \geq 0$. Положим y = 0, тогда $\left\langle y^0, g(x^0)\right\rangle \geq 0$. Однако, поскольку $g(x) \leq 0$, а y неотрицательно определенный вектор $\left\langle y^0, g(x^0)\right\rangle \leq 0$. Следовательно $\left\langle y^0, g(x^0)\right\rangle = 0$. С учетом этого из первого неравенства седловой точки получим $f(x^0) \leq f(x) + \left\langle y^0, g(x)\right\rangle$. Т.к. $\left\langle y^0, g(x)\right\rangle \leq 0$, *то* $f(x^0) \leq f(x)$ для $\forall x \in \mathrm{X} \Rightarrow f(x^*) = \min f(x)$.

Установленное в теореме положение весьма важно, так как позволяет сформулировать общую идею решения задач нелинейного программирования: задача отыскания условного экстремума функции многих переменных при выполнении некоторых условий может быть заменена решением максиминной задачи. Действительно, по определению седловой точки $F(x^0,y^0) = \max\limits_{x \in R} F(x, y^0)$, а значит $f(x^0) + \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^0 g_i(x^0) = \max\limits_{x \in R} [f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^0 g_i(x)]$ В частном случае, когда x^0 является внутренней точкой множества R, это приводит к системе уравнений метода множителей Лагранжа, известного из курса математического анализа.

Если седловая точка функции Лагранжа не существует, то рассмотренная процедура уже не обоснована. Далее мы изучим довольно широкий класс задач, в которых наличие седловой точки может быть строго доказано.

4.4. Выпуклое программирование

Определение. Функция, f, определенная на $n-$ мерном эвклидовом пространстве, называется <u>выпуклой,</u> если для $\forall x^1$ и x^2 и $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ выполняется соотношение $f\left(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2\right) \leq \alpha f\left(x^1\right) + (1-\alpha) f\left(x^2\right)$ и <u>вогнутой,</u> если $f\left(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2\right) \geq \alpha f\left(x^1\right) + (1+\alpha) f\left(x^2\right)$. Строгая выпуклость и, соответственно, строгая вогнутость задается строгими неравенствами. Геометрически для функции одной переменной это означает, что для строго выпуклой функции отрезок прямой, соединяющий две любые точки на её графике, лежит выше графика функции, а для строго вогнутой - ниже графика функции. Содержанием задач выпуклого программирования является отыскание максимума (минимума) вогнутых (выпуклых) функций на выпуклых множествах. А поскольку задачу на отыскание минимума легко переформулировать в задачу отыскания максимума, то без потери общности задача выпуклого программирования может быть представлена в следующем виде: $\min\limits_{x\in X} f(x) \quad X=\left\{x \mid x\in R,\ g_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,m}\right\}$, где $g_i(x)$ – выпуклые функции так же как и функция $f(x)$.

Сформулируем и докажем несколько теорем, необходимых для дальнейшего изложения материала.

<u>*Теорема 1.*</u> Функция $f\left(x\right)$ непрерывно дифференцируемая в R^n будет выпуклой, если для $\forall x^1$ и $x^2 \in R^n$ $f\left(x^1\right)-f(x^2)\ge < f'(x^2),\left(x^1-x^2\right)>$.

Пусть $f\left(x\right)$- выпуклая функция. Тогда по определению

$$f\left(\alpha x^1+(1-\alpha)x^2\right)\le \alpha f\left(x^1\right)+(1-\alpha)f\left(x^2\right)=\alpha\left[f\left(x^1\right)-f\left(x^2\right)\right]+f\left(x^2\right)$$

отсюда $f\left(x^1\right)-f(x^2)\ge\dfrac{f\left(x^2+\alpha\left(x^1-x^2\right)\right)-f\left(x^2\right)}{\alpha}$. Переходя к пределу при $\alpha\to 0$ в правой части получим

$$f\left(x^1\right)-f(x^2)\ \ge\ \lim_{\alpha\to 0} < f'(x^2+\alpha\left(x^1-x^2\right)),\left(x^1-x^2\right)> \ =$$

$$= \ < f'\left(x^2\right),\left(x^1-x^2\right)> .$$

Для функции одной переменной доказанное утверждение означает, что тангенс угла наклона касательной с положительным направлением оси абсцисс, построенной в любой точке графика выпуклой функции, не превосходит тангенса угла наклона секущей, проведенной из этой точки.

Замечание. Для вогнутой функции аналогично доказывается справедливость соотношения $f\left(x^1\right)-f(x^2) \le \langle f'(x^2),\left(x^1-x^2\right)\rangle$.

Теорема 2. Функция $f\left(x\right)$ непрерывно дифференцируемая в R^n и выпуклая на выпуклом множестве $X \subset R^n$ достигает минимума в точке $x^* \in X$ если $\langle f'\left(x^*\right),\left(x-x^*\right)\rangle \ge 0$ для $\forall x \in X$, причем если x^* внутренняя точка множества X, то $f'\left(x^*\right)=0$, что эквивалентно необходимому условию существования экстремума функций многих переменных.

Пусть $\langle f'(x^*),\left(x-x^*\right)\rangle \ge 0$. Т.к. функция выпукла, то, в соответствии с Теоремой 1, $f(x)-f(x^*) \ge \langle f'(x^*),\left(x-x^*\right)\rangle$. Поскольку по условию правая часть неравенства неотрицательна $f(x) \ge f(x^*)$ для $\forall x \in X$, т.е. точка x^* доставляет минимум функции $f\left(x\right)$.

Замечание. Условием максимума вогнутой функции будет соотношение $\langle f'(x^*),\left(x-x^*\right)\rangle \le 0$.

Теорема 3. Если функции *f(x)* выпукла, то каждая точка локального минимума является точкой глобального минимума, а если *f(x)* строго выпукла, то точка минимума единственна.

Пусть x^* точка локального минимума функции *f(x)*. Предположим, что точкой глобального минимума она не является. То есть существует другая точка $x^\wedge$ такая, что $f(x^\wedge) < f(x^*)$. Так как функция *f(x)* выпукла, то непосредственно из определения следует $f(\alpha x^\wedge + (1-\alpha)x^*) \le \alpha f(x^\wedge) + (1-\alpha)x^* < f(x^*)$. Преобразуя левую часть неравенства получим $f(x^* + \alpha(x^\wedge - x^*)) < f(x^*)$. Это означает, что α-окрестности точки x^* существует множество точек, в которых значение функции *f* меньше чем в точке x^*, а значит она не есть точка локального минимума, что противоречит условию теоремы.

Следовательно x^* - точка глобального минимума. Пусть x^* и $x^\wedge$ две различные точки минимума строго выпуклой функции $f(x)$. В этом случае $f(\alpha x^* + (1-\alpha)x^\wedge) < \alpha f(x^*) + (1-\alpha)f(x^\wedge)$. Однако поскольку по предположению $f(x^*) = f(x^\wedge) = \min f(x)$, то $f(\alpha x^*) + (1-\alpha)x^\wedge < \min f(x)$, иначе говоря, существуют точки, где значение функции f меньше, нежели в точках глобального минимума. Следовательно точки x^* и $x^\wedge$ совпадают.

Еще одно теоретическое положение, о котором следует упомянуть, касается достаточно широкого класса функций достоверно обладающих седловой точкой. Как следует из Теоремы 3, задача выпуклого программирования в этом случае имеет решение и оно эквивалентно отысканию седловой точки.

Теорема 4. Пусть X и Y выпуклые замкнутые ограниченные подмножества конечномерных евклидовых пространств, а функция $F(x,y)$ непрерывна по обеим переменным, вогнута по x для любого y и выпукла по y для любого x, тогда $F(x,y)$ имеет на $X \times Y$ седловую точку.

Пусть $F(x,y)$ строго вогнута по x для произвольного y и строго выпукла по y для произвольного x. Тогда, согласно свойству строгой выпуклости, существует $y(x)$ такое, что $F[x,y(x)] = \min F(x,y) = m(x)$ для $y \in Y$. В силу непрерывности функции F, а также замкнутости и ограниченности множеств X и Y следует непрерывность функций $y(x)$ и $m(x)$. Кроме того, функция $m(x)$ вогнута, как реализующая минимум семейства вогнутых функций. Обозначим x^0 точку, где функция $m(x)$ достигает максимума, то есть $m(x^0) = \max\limits_{x \in X} m(x) = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} F(x,y)$.

Так как функция $F(x,y)$ вогнута по x, для любого $x \in X$ и любого $\alpha \in (0,1)$ будет справедливо соотношение

$$F\left[\alpha x + (1-\alpha)x^0, y\right] > \alpha F(x,y) + (1-\alpha)F(x^0,y) \geq$$
$$\geq \alpha F(x,y) + (1-\alpha)m(x^0).$$

Выберем $y = [\alpha x + (1-\alpha)x^0] = \tilde{y}$, так чтобы $m[\alpha x + (1-\alpha)x^0] \geq \alpha F(x,\tilde{y}) + (1-\alpha)m(x^0)$. Но ввиду того, что $m(x^0) \geq m(x)$ для $\forall x \in X$, следует $m(x^0) \geq m[\alpha x + (1-\alpha)x^0]$, поэтому $F(x,\tilde{y}) \leq m(x^0) = F[x^0,y(x^0)]$. Положим $\alpha \to 0$. Тогда $\tilde{y} \to y(x^0) = y^0 \Rightarrow F(x,y^0) \leq F(x^0,y^0)$. Левая часть неравенства седловой точки доказана. Правая часть неравенства доказывается аналогично.

Замечание. Полученный результат можно распространить на функции не являющиеся строго выпуклыми и вогнутыми.

Однако на основании этой теоремы нельзя утверждать, что решение любой задачи выпуклого программирования может быть сведено к отысканию седловой точки, поскольку множество Y заведомо неограниченно как неотрицательный ортант евклидова пространства. Тем не менее установлено, что при выполнении условия регулярности, известного также под названием условия Слейтера седловая точка функции Лагранжа существует. Это условие требует существования точки $x \in R$ такой, что $g_i(x) < 0,\ i = \overline{1,m}$.

Теорема 5 (Куна-Таккера) Если задача выпуклого программирования удовлетворяет условию регулярности, то для того чтобы вектор $x^0 \in X$ был оптимальным планом этой задачи необходимо и достаточно существование такого $y^0 \geq 0$, что пара (x^0,y^0) являлась седловой точкой функции Лагранжа на произведении $R \times Y$. Достаточность этого положения доказана для общей задачи нелинейного программирования в рамках теоремы о связи седловой точки с решением задачи нелинейного программирования. В доказательстве необходимости используются сведения из функционального анализа, выходящие за рамки базового курса высшей математики технических высших учебных заведений и потому здесь оно не приводится.

Теорема Куна-Таккера обосновывает сведение решения задачи выпуклого программирования к отысканию седловой точки функции Лагранжа, позволяя обобщить классический метод неопределенных множителей Лагранжа на случай задач, имеющих в своем составе ограничения в форме неравенств. Действительно, рассмотрим задачу выпуклого программирования вида $\min f(x)$ при $g_i(x) \leq 0, i = \overline{1,m}$

где $x = \left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$. Строим функцию Лагранжа $F(x,y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x)$ и, вычисляя производные этой функции по переменным $x_j \left(j = \overline{1,n}\right)$, получим систему n уравнений с $n+m$ неизвестными

$$\frac{\partial F\left(x,y\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial g_i\left(x\right)}{\partial x_j} = 0 \; j = \overline{1,n}.$$

Для отыскания переменных $y_i \; i = \overline{1,m}$ используются комбинаторные условия, полученные в ходе доказательства Теоремы о связи седловой точки с решением задачи нелинейного программирования $< y^0, g(x^0) > = 0,$ или в координатной форме $y_i^0 g_i(x^0) = 0 \; i = \overline{1,m}.$ В тех случаях, когда соответствующие ограничения задачи выполняются как неравенства имеем $y_i^0 = 0,$ а в тех случаях, когда ограничения выполняются как строгие равенства получаем дополнительные уравнения вида $g_i(x) = 0$ для отыскания ненулевых y_i^0. Фактически эти условия аналогичны условиям дополняющей нежесткости и расширяют действие теории двойственности на задачи нелинейного программирования.

Пример 12. Решить задачу выпуклого программирования

$$W = min\left(x_1 + 1\right)^2 + \left(x_2 - 3\right)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 \le 1.$$

Функция Лагранжа задачи имеет вид: $F = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + y\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right).$

Дифференцируя по обеим переменным и добавляя комбинаторное условие, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2(x_1+1)+2yx_1=0, \\ 2(x_2-3)+2yx_2=0, \\ y\left(x_1^2+x_2^2-1\right)=0. \end{cases}$$

Проверяем гипотезу $y=0$. В этом случае из первого уравнения x_1=–1, а из второго x_2=3. Эти значения переменных не удовлетворяют ограничению задачи. Следовательно $y\neq 0$. Таким образом окончательно система уравнений примет вид

$$\begin{cases} x_1+1+yx_1=0, \\ x_2-3+yx_2=0, \\ x_1^2+x_2^2=1, \end{cases} \quad \text{отсюда} \quad \begin{matrix} x_1=\dfrac{-1}{1+y} \\ x_2=\dfrac{3}{1+y} \end{matrix}.$$

Подставив в третье уравнение системы, получим квадратное уравнение $y^2+2y-9=0$. С учетом неотрицательности переменной y, имеем $y^0=\sqrt{10}-1$. Поэтому $x_1^0=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $x_2^0=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Нетрудно убедиться, что при этих значениях переменных ограничение задачи удовлетворяется, как и следовало ожидать, в форме равенства. Подставляя x_1^0 и x_2^0 в выражение функции, находим решение задачи $W=11-2\sqrt{10}$.

Пример 13. Решить задачу выпуклого программирования

$W=min\, x_1^2+x_2^2$

$2x_1+x_2+4\leq 0.$

Записываем функцию Лагранжа $F=x_1{}^2+x_2{}^2+y\left(2x_1+x_2-4\right)$.

Вычисляя частные производные и учитывая комбинаторное условие, получим

$$\begin{cases} 2x_1+2y=0, \\ 2x_2+y=0, \\ y(x_1+x_2+4)=0. \end{cases}$$

Проверяем гипотезу $y = 0$. В этом случае из первого и второго уравнений системы x_1=0 и x_2=0, что противоречит ограничению задачи. Следовательно, $y \neq 0$. Таким образом окончательно система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 2x_1 + 2y = 0, \\ 2x_2 + y = 0, \\ 2x_1 + x_2 = -4. \end{cases}$$

Решая систему определяем координаты точки минимуму $x_1^0 = -8/5$; $x_2^0 = -4/5$. Подставляя x_1^0 и x_2^0 в выражение целевой функции, находим решение задачи $W = 16/5$.

Аппарат выпуклого программирования эффективен при решении задачи оптимизации работы каскада химических реакторов, задачи распределения ограниченных количеств ресурсов, задачи производителя с характерной для классической экономической теории вогнутой производственной функцией и т.п. Рассмотрим порядок решения одной из таких задач.

Пример 14. Зависимость дневной выручки небольшого кафе Q от количества столиков М и числа сотрудников L может быть выражена формулой $Q = 200\sqrt[3]{M^2}\sqrt[4]{L}$. Расходы на содержание одного столика составляют 100 д.е., а среднедневная зарплата одного сотрудника 50 д.е. Найти численность персонала кафе и количество столиков, обеспечивающих максимальную прибыль, при условии, что дневные расходы ограничены суммой 1500 д.е.

Величина прибыли, определяемая как разность между выручкой и издержками, составляет $W = 200\sqrt[3]{M^2}\sqrt[4]{L} - 100M - 50L$. Ограничение, задаваемое предельной суммой дневных издержек, имеет вид $100M + 50L \leq 1500$. Поскольку функция W вогнута, а область изменения переменных замкнута и ограничена, функция

Лагранжа $F = W(M,L) + y(100M + 50L - 1500)$ имеет седловую точку, которая может быть найдена решением системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial M} = \dfrac{400}{3}\dfrac{\sqrt[4]{L}}{\sqrt[3]{M}} - 100 + 100y = 0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial L} = 50\dfrac{\sqrt[3]{M^2}}{\sqrt[4]{L^3}} - 50 + 50y = 0 \\ y(100M + 50L - 1500 = 0 \end{cases}$$

Проверяем гипотезу $y = 0$. В этом случае система приобретает вид

$$\begin{cases} \dfrac{400}{3}\dfrac{\sqrt[4]{L}}{\sqrt[3]{M}} = 100 \\ 50\dfrac{\sqrt[3]{M^2}}{\sqrt[4]{L^3}} = 50 \end{cases}$$

. Решая её получим $M \approx 13{,}3$; $L \approx 9{,}9$. Умножая на стоимость соответствующих ресурсов, получим 13,3 × 100 + 9,9 × 50 = 1825. Ограничение нарушено, следовательно $y \neq 0$. Таким образом, окончательный вид системы уравнений Лагранжа будет

$$\begin{cases} \dfrac{400}{3}\dfrac{\sqrt[4]{L}}{\sqrt[3]{M}} + 100y = 100 \\ 50\dfrac{\sqrt[3]{M^2}}{\sqrt[4]{L^3}} + 50y = 50 \\ 100M + 50L = 1500 \end{cases}$$

. Исключив переменную y из первых двух уравнений, получим: $L = 0{,}75M$, и, подставив в третье уравнение, найдем $M \approx 10{,}9$, а $L \approx 8{,}2$. Округляя до ближайших целых чисел, имеем ответ: количество столиков $M = 11$, а число сотрудников $L = 8$.

4.5. Общие принципы численных методов решения задач нелинейного программирования

Применение аналитических методов решения задач нелинейного программирования, как было показано выше, требует выполнения целого ряда условий, что существенно ограничивает возможности их использования. Однако, даже если все эти условия выполнены, вид целевой функции и ограничений может оказаться таким, что решение системы уравнений Лагранжа будет являться отнюдь не простой задачей. Это привело к созданию численных методов решения таких задач, которые не позволяя (как правило) найти точное значение максимума (минимума) целевой функции, за конечное число шагов приводят в ε–окрестность искомого оптимума, где ε – некоторое наперед заданное сколь угодно малое положительное число характеризующее желаемую точность. Подавляющее большинство численных методов нелинейного программирования относятся к классу так называемых итерационных, или шаговых методов, от латинского слова ***iteratio***, что означает повторение. Основная идея этих методов состоит в многократном повторении однотипных вычислений, организованных так, чтобы каждый новый шаг в выбранном направлении приближал к оптимуму. Для общей задачи нелинейного программирования $max\ (min)\ f(x)$ при условии $x \in X$, где $x = (x_1, x_2, \ldots\ x_n)$, процедуры всех итерационных методов укладываются в следующую схему: выбирается какая-либо точка $x^0 \in X$ и направление, задаваемое вектором ρ^0. В этом направлении из точки x^0 делается шаг длиной α_0. Таким образом, координаты новой точки определятся как $x^1 = x^0 + \alpha_0\rho^0$. Если шаг удачен, что выявляется по факту возрастания (убывания) целевой функции, то из вновь найденной точки он повторяется в новом направлении и, естественно, другой длины вплоть до достижения желаемой точности локализации оптимума.

Рассмотрим функцию двух переменных $y = f(x_1, x_2)$ изображенную на рис. 4.3. Геометрически это некоторая поверхность в трехмерном пространстве.

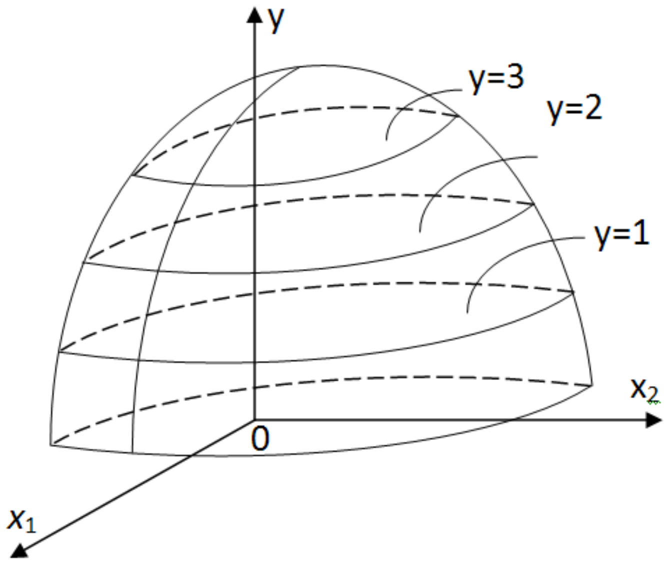


Рис. 4.3. Функция двух переменных

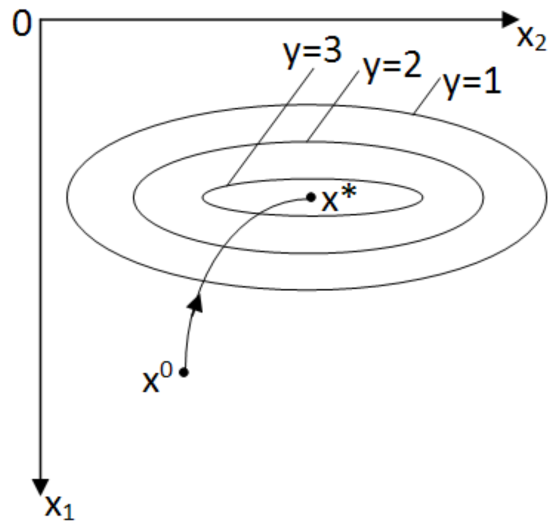


Рис. 4.4. Линии уровня

Построим секущие плоскости параллельные плоскости x_1ox_2 y=1, $y=2$ и т.д. и спроектируем линии пересечения этих плоскостей с поверхностью на плоскость x_1ox_2 (см. рис. 4.4), где они образуют семейство кривых, на которых значения функции отклика постоянно. Эти кривые называются <u>линиями уровня</u> целевой функции. В общем случае линии уровня функции $y = f(x_1, x_2,...,x_n)$ представляют собой результат, проектирования линий пересечения гиперплоскостей вида $y=const$ и n-мерной поверхности на гиперплоскость факторных переменных. Основная идея всех оптимизационных процедур для многомерных объектов состоит в организации движения от одной линии уровня к другой из некоторой произвольной точки x^0 в направлении точки оптимума x^*. Направление движения стараются выбрать так, чтобы скорость изменения целевой функции в этом направлении была наибольшей.

В связи с этим значительный практический интерес представляет вопрос: возможно ли построение такой последовательности точек $\{x^k\}$, чтобы, начиная с некоторого шага под номером m, выполнялось условие $|f(x^*) - f(x^m)| < \varepsilon$, где x^* – точка искомого экстремума. Последовательность, обладающая таким свойством, называется <u>релаксационной</u>. Именно получение подобной последовательности является обязательным условием построения алгоритмов численного решения задач нелинейного программирования, предусматривающих переходы от одной линии уровня к другой в направлении extr.

Рассмотрим сначала задачу *max (min)* $f(x)$ при условии $x \in X$, *где* $X = R^n$. В этом случае, поскольку множество X не замкнуто, для существования решения на функцию f должны быть наложены условия ограниченности сверху, если задача сформулирована на отыскание максимума, и снизу, если на отыскание минимума. Тогда, в соответствии с известным положением математического анализа, возможно построение неубывающей (невозрастающей) последовательности $\{f(x^k)\}$, сходящейся к пределу $f(x^*)$. Положим для определенности $f(x^*) = \min f(x)$ и обозначим $\phi_k = f(x^k) - f(x^*)$. Если последовательность $\{x^k\}$ релаксационная, то по определению $f(x^k) \to f(x^*)$ при $k \to \infty$, а $\phi_k = 0$ при $x^k = x^*$.

<u>*Лемма*</u>. Если $\varphi_{k-1} - \varphi_k = \gamma_k \varphi_{k-1}^2, \quad \gamma_k \geq 0$, то имеет место оценка:

$$\varphi_m \leq \frac{\varphi_0}{1 + \varphi_0 \sum_{k=1}^{m} \gamma_k}$$

Разделим соотношение, вынесенное в условие леммы на $\phi_{k-1}\phi_k$. Тогда $\dfrac{1}{\varphi_k} - \dfrac{1}{\varphi_{k-1}} = \gamma_k \dfrac{\varphi_{k-1}}{\varphi_k} \geq \gamma_k$, поскольку последовательность $\{f(x^k)\}$ невозрастающая и, следовательно, $\phi_{k-1} \geq \phi_k$. Суммируя левые и правые части неравенства от 1 до m получим: $\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\varphi_k}-\frac{1}{\varphi_{k-1}}\right)=\frac{1}{\varphi_m}-\frac{1}{\varphi_0}\geq\sum_{k=1}^{m}\gamma_k$. Выражая отсюда φ_m, получаем искомую оценку.

Практическое значение доказанного результата невелико, поскольку отыскание величин Υ_k в каждом конкретном случае достаточно затруднительно. Однако, если на целевую функцию $f(x)$ наложить некоторые дополнительные условия, можно указать способ вычисления γ_k.

<u>*Теорема*</u>. Если функция f(x) выпукла и дифференцируема в R^n, а последовательность $\{x^k\}$ релаксационная, то $\gamma_k=\frac{f(x^{k-1})-f(x^k)}{|f'(x^{k-1})|^2\cdot|x^{k-1}-x^*|^2}$.

В соответствии с обозначениями, принятыми в выше доказанной лемме, $\varphi_{k-1}-\varphi_k=f(x^{k-1})-f(x^k)$. Умножим и разделим это выражение на $\left\langle f'(x^{k-1}),(x^{k-1}-x^*)\right\rangle^2$. Согласно теореме 1 о признаке выпуклости $f(x^{k-1})-f(x^*)\leq\left\langle f'(x^{k-1}),(x^{k-1}-x^*\right\rangle$, поэтому

$$\varphi_{k-1}-\varphi_k=f(x^{k-1})-f(x^k)\geq\frac{f(x^{k-1})-f(x^k)}{\left\langle f'(x^{k-1}),(x^{k-1}-x^*)\right\rangle^2}(f(x^{k-1})-f(x^*))^2.$$

Применяя к знаменателю этого выражения неравенство Коши – Буняковского, получим $\varphi_{k-1}-\varphi_k\geq\frac{f(x^{k-1})-f(x^k)}{|f'(x^{k-1})|^2\cdot|x^{k-1}-x^*|^2}\varphi_{k-1}^2$, что доказывает утверждение теоремы.

Практическое использование полученного результата для оценки сходимости затруднительно, так как элементы последовательности $\{\Upsilon_k\}$ могут быть достоверно установлены только после нахождения релаксационной последовательности $\{x^k\}$. Кроме того в процессе решения остается неизвестной разность $x^{k-1}-x^*$, ибо отыскание положения точки x^* и составляет содержание задачи. Однако, в некоторых случаях удается указать значение константы, которая ограничивает снизу члены последовательности $\{\Upsilon_k\}$, начиная с какого то номера k. В частности, если для точки x^0, откуда начинается движение к минимуму, множество $X_0=\{x\epsilon R^n: f(x)\leq f(x^0)\}$ ограничено, то есть его диаметр конечен и равен d, то, очевидно $|x^{k-1}-x^*|\leq d$ для любого элемента последовательности $\{x^k\}$. В этом случае $\gamma_k \geq \dfrac{f(x^{k-1}) - f(x^k)}{d^2 \cdot |f'(x^{k-1})|^2}$, вычислить которые несложно.

Принято различать три группы итерационных методов численного решения задач нелинейного программирования.

1. Методы, в которых для построения шага и определения направления движения используется информация только о значении целевой функции. Они называются методами **нулевого порядка**.

2. Методы, где кроме информации о целевой функции используется также информация о её частных производных первого порядка. Эти методы носят название методов **первого порядка.**

3. Методы наряду с информацией о функции, и её первых производных, использующие информацию о вторых производных.

Это методы **второго порядка**. В настоящее время известно очень много вычислительных схем, реализующих методы всех трех упомянутых типов. Существует весьма обширная библиография, посвященная этой тематике, которая содержит описание различных вычислительных алгоритмов, их глубокое теоретическое обоснование и рекомендации по применению. В данной работе будут рассмотрены вычислительные процедуры, наиболее широко используемые в практических инженерных расчетах.

4.6. Методы нулевого порядка

Целевые функции задач нелинейного программирования, которые решаются в процессе научных исследований и инженерной деятельности, обладают рядом характерных черт, обусловленных тем, что, как правило, они получены по результатам обработки экспериментальных данных. Упомянем те из них, которые могут оказать влияние на ход решения и, следовательно, должны быть учтены при выборе той или иной вычислительной схемы.

1. Неточности и случайные ошибки неизбежные в ходе любого эксперимента могут стать причиной искажения оценок параметров целевой функции.

2. Многомерные поверхности достаточно часто оказываются не унимодальными, то есть имеют в области поиска несколько

различных максимумов или минимумов. Это приводит к тому, что как процесс, так и результат решения задачи оказываются существенно зависимыми от положения начальной точки поиска. Если она расположена в зоне аттракции какого либо локального максимума или минимума, то любая релаксационная последовательность, берущая в ней начало, будет сходиться к своему аттрактору, а точка глобального экстремума останется недостижимой. На рис. 4.5 представлены линии уровня участка поверхности, где имеются два экстремума и ситуация в которой релаксационная последовательность, начинающаяся в точке x^0, захватывается левым экстремумом, если движение начинается по координате x_1 и правым в противном случае.

3. Ещё одной чрезвычайно неприятной особенностью многомерных целевых функций являются так называемые «овраги (гребни)». Это такие участки поверхности, где изменение целевой функции при движении вдоль одной переменной (группе переменных) происходит значительно быстрее, чем при движении вдоль другой группе переменных. На поверхностях подобного типа большинство итерационных алгоритмов практически останавливаются, поскольку величина изменения целевой функции $|f(^{k-1}) - f(x^k)|$ от шага к шагу становится исчезающее малой.

4. Условия, в которых была получена целевая функция, иногда не допускают даже предположений о её дифференцируемости, что автоматически исключает использование методов первого и второго порядка.

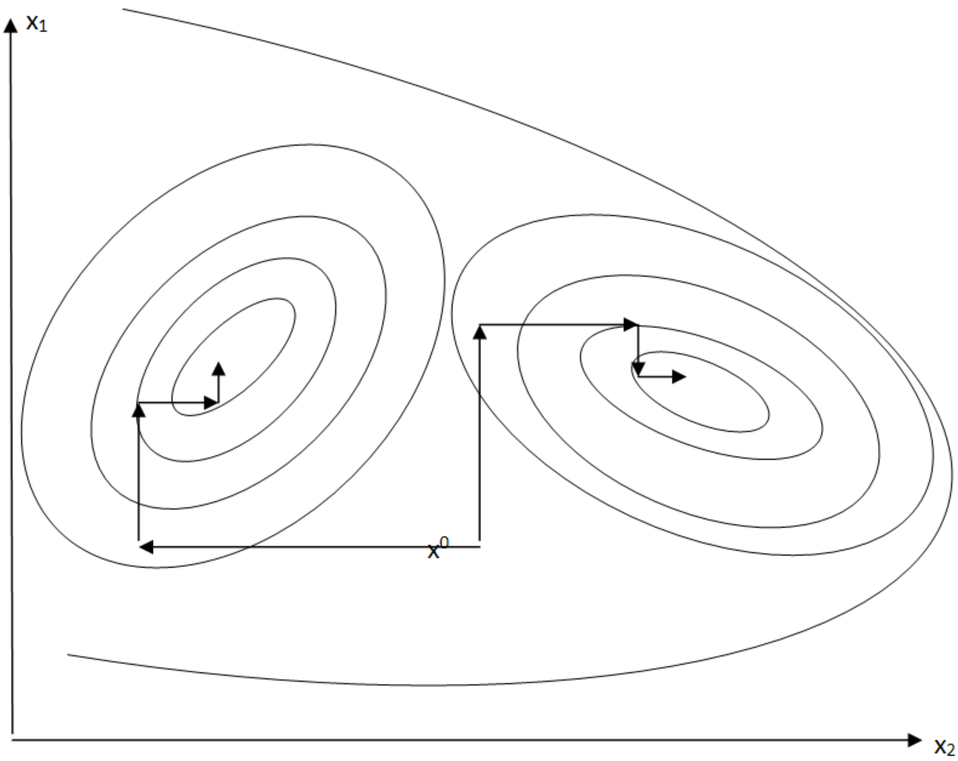


Рис. 4.5. Линии уровней участка поверхности

Метод Зейделя (поочередного изменения координат). Алгоритм этого метода чрезвычайно прост и в существенных чертах полностью определяется своим названием. Рассмотрим его в порядке реализуемых этапов.

1. В исходной точке поиска $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ фиксируются значения всех переменных, кроме одной, например, x_1, которая меняется с некоторым постоянным шагом h_1 в направлении, соответствующем возрастанию (убыванию) целевой функции.

2. Как только рост (убывание) целевой функции прекратится, переменная x^1 фиксируется на уровне x_1^1, при котором функция достигла своего наибольшего значения, и аналогичные действия выполняются для переменной x_2 с шагом h_2.

3. Производя подобную процедуру поочередно для всех факторных переменных, получим точку $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots x_n^1)$. Очевидно, что в соответствии с порядком построения

$f(x_1^1, x_2^1, \ldots x_n^1) > f(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$, если отыскивается максимум, а если минимум, то знак неравенства меняется на противоположный.

4. Повторяя операции п.п. 1–3 необходимое число раз получаем релаксационную последовательность $\{x^k\}$.

5. Процесс прекращается, а решение оптимизационной задачи считается законченным, когда после очередного выполнения цикла 1–3 изменение функции отклика становится меньше некоторого заранее заданного положительного числа ε, определяющего желаемую точность вычислений. Т.е. при выполнении соотношения $|f(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots x_n^{k+1}) - f(x_1^k, x_2^k, \ldots x_n^k)| < \varepsilon$.

Замечание. Если требуемая точность не достигается, применяют дробление шага, уменьшая его длину по сравнению с выбранной первоначально в два, четыре и более раз. Вообще выбор длины шага при реализации любых численных алгоритмов решения экстремальных задач и порядка его дробления требует эвристического подхода и обязательного использования всей априорной информации об особенностях целевой функции и физической сущности факторных переменных.

Рассмотренный метод поиска оптимума, как уже упоминалось, очень прост и, что особенно важно, не критичен к возможным ошибкам задания факторных переменных и погрешностям измерений целевой функции. К недостаткам метода следует отнести значительное возрастание объема вычислений с увеличением размерности задачи и низкую эффективность метода применительно к не унимодальным функциям.

Пример 15. Методом Зейделя найти максимум функции $f = -4x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 + 5x_1 + 4x_2 + 1$ с точностью $\varepsilon = 0,1$, начав движение из точки $x^0 = (1;3)$. Вычислим $f(x^0) = 14$ и начнем изменение координаты x_1 с шагом $h_1 = 1$ в направлении возрастания функции f, зафиксировав при этом координату x_2 на исходном уровне и следя за изменением целевой функции. $f(2;3)$=16; $f(3;3)=14$. Поскольку наилучший результат достигнут в точке (2;3), фиксируем координату x_1 на уровне $x_1 = 2$ и с шагом $h_2 = 1$ изменяем координату x_2 в направлении возрастания функции f. $f(2;4) = 19$; $f(2;5) = 20$; $f(2;6) =19$. Наилучший результат достигнут в точке (2;5). Первый цикл поиска завершен. Получена точка $x^1 = (2;5)$. Как и следовало ожидать $f(x^1) > f(x^0)$. Вновь фиксируем координату x_2 и продолжаем поиск, двигаясь вдоль оси x_1. $f(3;5) = 20$. Так как улучшения по сравнению с точкой x^1 не получено, применяем дробление шага, выбирая $h_1 = 0{,}5$. В новой точке (2,5;5) целевая функция $f(2{,}5;5) = 21$. Фиксируем координату x_1 и продолжаем движение вдоль координаты x_2 с прежней длиной шага: $f(2{,}5;6) = 21{,}5$; $f(2{,}5;7) = 20$. Поскольку возможности улучшения с этой длиной шага исчерпаны, выполняем дробление шага, выбирая $h_2 =0{,}5$. $f(2{,}5;6{,}5) = 21$. Роста целевой функции опять не наблюдается, однако желаемая точность не достигнута. Поэтому в качестве точки x^2 оставляем точку (2,5;6) и принимаем длину шага $h_1 = 0{,}2$. Это позволяет продолжить последовательность точек, в которых наблюдается рост целевой функции: $f(2{,}7;6{,}5) = 21{,}74$; $f(2{,}9;6{,}5) = 22{,}16$; $f(3{,}1;6{,}5) = 22{,}26$; $f(3{,}3;6{,}5) = 22{,}04$. Так как возрастание прекратилось, фиксируем координату x_1 и приступаем к изменению координаты x_2 с шагом $h_2 = 0{,}2$. В итоге получим новую точку и значение целевой функции в ней $f(3{,}1;6{,}7) =22{,}28$. Легко проверить, что $f(3{,}1;6{,}7) - f(3{,}1;6{,}5) = 22{,}28 - 22{,}26 = 0{,}02 < \varepsilon = 0{,}1$. Таким образом, желаемая точность достигнута, а точка (3,1;6,7) удовлетворительно оценивает положение истинного максимума целевой функции. Применяя классические методы анализа, можно найти точное положение максимума и проверить качество численного решения. $x_1^* = \frac{22}{7} \cong 3{,}142$, а $x_2^* = \frac{47}{7} \cong 6{,}714$. Точное же значение максимума $f(x^*) = 22{,}286$.

<u>**Симплекс-метод**</u>. Симплексом в пространстве R^n называется правильный выпуклый многогранник, имеющий $n+1$ вершину. Главным свойством симплекса, обуславливающим возможность его применения для решения оптимизационных задач, является то

обстоятельство, что любая из его вершин определяется пересечением n гиперплоскостей пространства R^n, а это значит, что против каждой вершины лежит в точности одна плоскость. Поэтому для построения нового симплекса, не зависимо от размерности пространства, достаточно определить координаты только одной точки, симметрично расположенной к исходной относительно центра противоположной грани. На рис. 4.6 изображена процедура поиска оптимума с помощью симплекса в двумерном пространстве, который представляет собой правильный треугольник. Пусть задачей оптимизации является отыскание максимума некоторой унимодальной функции, определенной на плоскости x_1ox_2. Поиск начинается с определения значения целевой функции в трех точках 1; 2; 3, образующих вершины правильного треугольника. Пусть худший результат зафиксирован в точке 1. Строим новую точку 4, симметричную точке 1 относительно противолежащей стороне треугольника, образующего исходный симплекс.

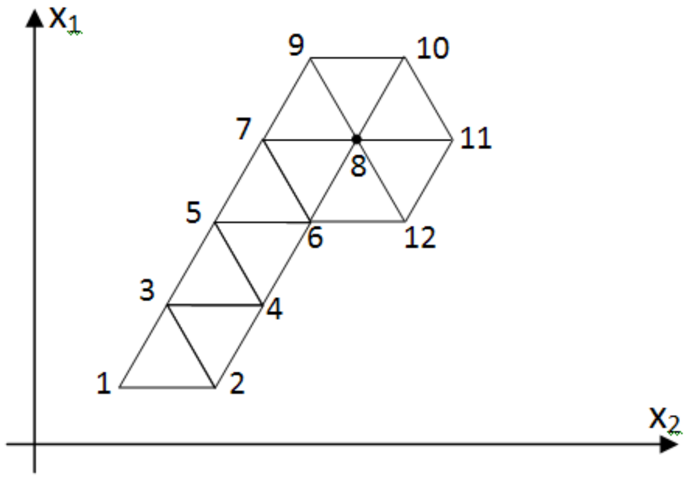


Рис. 4.6. Поиск оптимума с помощью симплекса

В результате получен новый равносторонний треугольник (симплекс) с вершинами 2; 3; 4. Заметим, что две из трех вершин нового симплекса являются одновременно вершинами старого. В новом симплексе так же выбирается вершина с худшим значением функции отклика в ней, в рассматриваемом примере это вершина 2, и симметрично отражается относительно центра противоположной грани в вершину 5 с образованием еще одного симплекса. Процесс построения продолжается вплоть до зацикливания, т.е. до тех пор, пока симплекс не начнет вращаться около одной из своих вершин. На Рис.10 это вершина 8. Это означает, что максимум целевой функции локализован внутри плоской выпуклой фигуры с центром в точке 8. Это правильный шестиугольник с вершинами 6; 7; 9; 10; 11; 12. При необходимости уточнения положения максимума производят редукцию симплекса, т.е. уменьшение длины ребра в два, три или более раз и продолжают процедуру поиска редуцированным симплексом, повторяя дробление до тех пор, пока после очередного зацикливания модуль разности между значениями целевой функции для двух любых вершин цикла не станет меньше некоторого наперед заданного положительного числа ε. Точно также поступают и в том случае, когда вновь построенная вершина выходит за границы множества задания факторных переменных.

Рассмотрим алгебраическую процедуру построения симплекса произвольной размерности. Пусть исходный симплекс в R^n задан множеством вершин $\{s_i\}$ $i = \overline{1,n+1}$, каждая из которых определяется n координатами $x^i = (x_1^i, x_2^i, \ldots x_n^i)$. Предположим худший результат, функция отклика имеет в вершине s_j. Для задания нового симплекса необходимо определить координаты вершины s_j, симметричной к вершине s_j относительно центра противолежащей грани. Т.к. любая грань правильного симплекса представляет собой правильный выпуклый n-угольник, координаты его центра x^c могут быть вычислены как среднее арифметическое координат входящих в его состав вершин. $x^c = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x^i - x^j\right)$. Вектор u, характеризующий расстояние от вершины x^j до центра грани, определится как разность соответствующих координат $u = x^c - x^j$. А координаты новой вершины

x^j будут $x^j = x^c + u = 2x^c - x^j$, или, учитывая выражение координат центра грани через вершины симплекса, $x^j = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n+1} x^i - \left(1+\frac{2}{n}\right)x^j$.

Несомненным достоинством рассмотренного метода является не критичность алгоритма к изменению размерности задачи. Недостаток тот же, что и у метода Зейделя: сложность отыскания глобального экстремума не унимодальной целевой функции.

Методы случайных направлений. Основная идея этих методов состоит в том, чтобы перебором случайных совокупностей значений факторных переменных найти оптимум целевой функции или направление движения к нему. Введем понятие случайного вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$, определенного в n-мерном пространстве факторных переменных. Этот вектор имеет единичную длину и с равной возможностью принимает любое направление. Вектор с такими свойствами легко получить из последовательности случайных чисел $\{\beta_j\}$ равномерно распределенных на отрезке [–1,1]. Тогда компоненты случайного вектора α определятся как $\alpha_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2}}$. Очевидно, что длина такого вектора будет равна единице, т.к. $|\alpha| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\alpha_i^2} = 1$. Рассмотрим алгоритм отыскания оптимума функции отклика $f(x_1,x_2,..,x_n)$ одним из методов случайных направлений.

1. В произвольной точке пространства факторных переменных x^0 вычисляется значение функции отклика $f(x^0)$.

2. Из точки x^0 в случайно выбранном направлении совершается шаг длиною h, по результатам которого определяются координаты новой точки $x^1 = x^0 + h\alpha^0$.

3. Если задача сформулирована на отыскание максимума функции $f(x)$ и $f(x^1) > f(x^0)$, то шаг признается удачным и из точки x^1

делается новый шаг в направлении вектора α^1, так же определенного случайным образом.

4. Если $f(x^1) < f(x^0)$, то случайный выбор координат вектора α^0 повторяется до тех пор, пока не будет достигнут рост целевой функции.

5. Процедура поиска считается законченной, а точка оптимума найденной, если после серии из s шагов, выполненных из этой точки, роста целевой функции добиться не удается. На практике число шагов s в серии принимается равным размерности факторного пространства решаемой задачи, однако это правило, разумеется, не является обязательным и носит чисто рекомендательный характер.

Описанный алгоритм носит название <u>метод случайных направлений с возвратом при неудачном шаге</u>.

В некоторых ситуациях в случае неудачного шага оказывается более целесообразным определять направление нового шага не случайным образом, а делать его в направлении противоположном неудачному, находя координаты новой точки по формуле $x^{k+1} = x^k - h\alpha^k$. Такая модификация алгоритма называется <u>метод случайных направлений с обратным шагом</u>.

Существует также возможность в каждой точке на траектории поиска строить не один, а несколько случайных векторов и в качестве направления движения выбирать то, где наблюдается наиболее значительное изменение целевой функции. Эта разновидность методов случайных направлений называется <u>алгоритм наилучшей пробы</u>.

Трудоемкость вычислительной процедуры всех упомянутых модификаций практически не меняется с увеличением размерности решаемой задачи, что является несомненным достоинством.

Метод Хука – Дживса (конфигураций). Как отмечалось выше, наличие у целевой функции особенностей в виде гребней (оврагов) существенно осложняет применение почти всех численных процедур поиска экстремума. Здесь будет рассмотрен алгоритм, который в середине прошлого века разработали американские ученые R. Hooke и T. Jeeves. Он позволяет эффективно преодолевать сложности, порождаемые «овражной» структурой поверхностей, где ведется поиск оптимума.

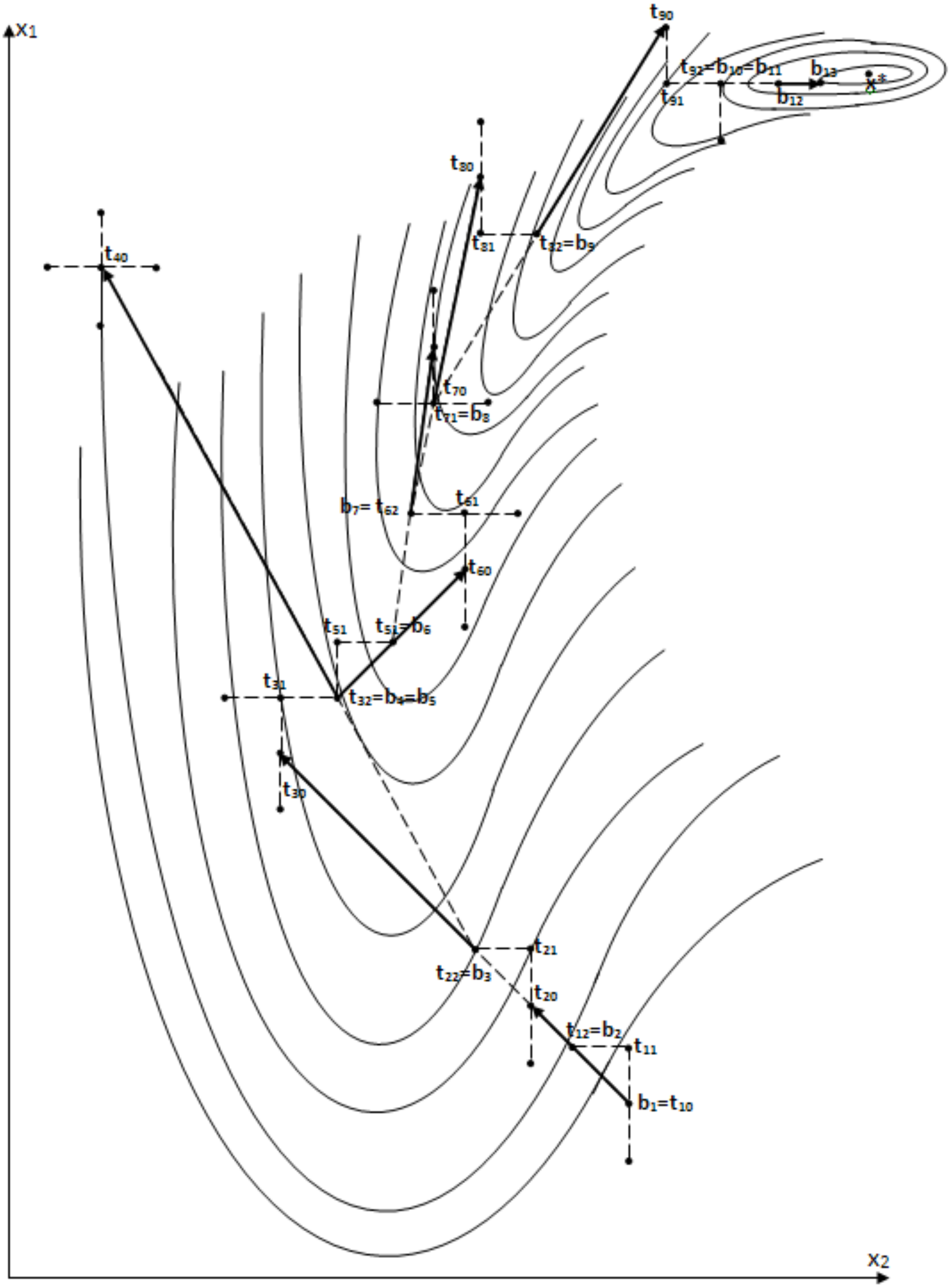


Рис. 4.6. Функция с гребневидной структурой

В основе этого метода лежит гипотеза о локальной неизменности направления поиска. Проще говоря, предполагается, что в некоторой окрестности произвольно выбранной точки пространства факторных переменных гребень (овраг) сохраняет свою ориентацию. Это позволяет двигаться к точке оптимума вдоль обнаруженного гребня (оврага).

Рассмотрим поверхность отклика, имеющую гребневидную структуру, линии уровня которой изображены на рис. 4.6.

Поиск начинается в некоторой произвольно выбранной базовой точке b_1 и ведется шагами длиной δ_i по каждой факторной переменной x_i. Значения функции отклика определяются в двух последовательных точках b_1 и $b_1+\delta_1$. Если в новой точке значение функции отклика лучше, то ее называют временной вершиной, обозначают t_{11} и дальнейший поиск ведут уже из нее. Первый индекс означает, что осуществляется первый этап поиска, а второй, что изменению подверглась первая факторная переменная. Если точке $b_1+\delta_1$ соответствует худшее значение целевой функции, то проверяют точку $b_1-\delta_1$. Возможно, однако, что в обеих этих точках значение функции отклика будет хуже, чем в точке b_1. Тогда в качестве временной вершины выбирается сама точка b_1. На рис. 4.6. представлен первый случай. Из вершины t_{11} аналогичным образом выполняется поиск по следующей факторной переменной x_2 и так далее. По итогам первого этапа поиска по всем n переменным находится временная вершина t_{1n}, которой дают название второй базовой точки b_2. На рис. 4.6 это точка t_{12}. В общем случае для i-ого этапа поиска по j-ой переменной порядок выявления временной вершины можно задать соотношением:

$$t_{ij}=\begin{cases} t_{i,j-1}+\delta_j, если \quad f(t_{i,j-1}+\delta_j)>f(t_{i,j-1}) \\ t_{i,j-1}-\delta_j, если \quad f(t_{i,j-1}-\delta_j)>f(t_{i,j-1})>f(t_{i,j-1}+\delta_j) \\ t_{i,j-1}, \quad если \quad f(t_{i,j-1})>max[f(t_{i,j-1}+\delta_j), f(t_{i,j-1}-\delta_j)] \end{cases}$$

Пара базовых точек b_1 и b_2 определяет первую конфигурацию. Дальнейшая процедура поиска основывается на гипотезе, что направление движения из новой базовой точки остается таким же, как на предыдущем участке. Принимая эту гипотезу, в окрестности точки b_2 отказываются от пробных шагов вдоль факторных переменных, а продвигаются в направлении вектора b_1b_2 на величину его удвоенной длины, считая от базовой точки b_1. Это движение определяет новую временную вершину t_{20} второй конфигурации, началом которой является точка b_2. Таким образом, координаты точки t_{20} определятся как $t_{20} = b_1 + 2(b_2 - b_1) = 2b_2 - b_1$. В окрестности точки t_{20} выполняются пробные шаги вдоль факторных координат, цель которых состоит в выяснении, не нуждается ли выбранное направление в коррекции. Цикл пробных шагов завершается нахождением вершины t_{2n}, которая выбирается в качестве третьей базовой точки b_3. Координаты новой временной вершины определяются тем же порядком $t_{30}=2b_3–b_2$. Выполняя пробные шаги, находим координаты новой базовой точки b_4 и получаем новую временную вершину $t_{40}=2b_4–b_3$. Но, как видно из рис. 4.6, этот шаг неудачен, ибо значение функции отклика в точке t_{40} хуже, чем в базовой точке b_4, что обусловлено изменением ориентации гребня. Это явление, называемое распадом конфигурации, указывает на необходимость изменения направления движения и построения новой конфигурации. Полагая $b_4=b_5$, осуществляем в ее окрестности серию пробных шагов и строим новую конфигурацию так же, как в точке b_1. Как показано на рис. 4.6 в точке t_{90} наблюдается еще один распад конфигурации, обусловленный поворотом гребня. Повторяя процедуру построения базовых точек, проходим, наконец, в точку b_{13}, находящуюся в непосредственной близости к точке оптимума x^*. Необходимая точность решения обеспечивается дроблением длины пробных шагов δ_i. Поиск считается законченным после того, как длина пробного шага станет, меньше заранее выбранной величины и эти шаги в окрестности очередной базовой точки не будут улучшать, значение целевой функции.

Метод Хука–Дживса позволяет достаточно быстро двигаться по гребню (оврагу) в направлении оптимума, затрачивая минимальные усилия на построение новой конфигурации при разрушении старой. Процедура поиска практически не усложняется с увеличением размерности задачи, однако эффективность ее существенно зависит от того, насколько удачно выбраны величины пробных шагов по факторным переменным.

Пример 16. Методом Хука–Дживса найти минимум функции $f = 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 4(x_1 + 2x_2) + 22$. Процесс поиска начать из базовой точки b_1=(4,8). Величину пробных шагов по обеим факторным переменным взять δ_1=δ_2=1. Для контроля вычислений определим координаты точки минимума функции f классическим методом. Вычисляя частные производные по обеим переменным, и, приравнивая их нулю, получим x^*=(–1,–2), а $f(x^*)$=12. Однако, вычислим значение целевой функции в точке b_1 $f(b_1)$=262 и выполним пробные шаги по переменной x_1. $b_1+\delta_1$=(5,8) и соответственно $f(b_1+\delta_1)$=288. Значение функции выросло, поэтому пробный шаг признается неудачным и выполняется другой в противоположном направлении $b_1 - \delta_1 = (3{,}8)$. $f(b_1 - \delta_1) = 248$. Значение функции по сравнению с первой базовой точкой уменьшилось, поэтому полагаем $b_1 - \delta_1 = t_{11}$ и из этой временной вершины выполняем пробные шаги по перемененной x_2. $t_{11} + \delta_2 = (3{,}9)$. $f(t_{11} + \delta_2) = 295$. Шаг неудачен т.к. $f(t_{11} + \delta_2) > f(t_{11})$. Вычисляем значение целевой функции в точке $t_{11} - \delta_2 = (3{,}7)$. $f(t_{11} - \delta_2) = 207$. Это лучший результат по всем выполненным замерам, поэтому получаем $t_{11} - \delta_2 = t_{12} = b_2$ и, в соответствии с рассмотренным алгоритмом строим конфигурацию и определяем координаты точки $t_{20} = 2b_2 - b_1 = 2(3{,}7) - (4{,}8) = (2{,}6)$. $f(t_{20}) = 162$. Уменьшение функции достигнуто, следовательно, распада конфигурации не произошло. По первой переменной делаем пробные шаги в окрестности точки t_{20}. $t_{20}-\delta_1=(1,6)$; $f(t_{20}-\delta_1)=164$. И в другую сторону $t_{20}+\delta_1=(3,6)$; $f(t_{20}+\delta_1)=172$. Ввиду того, что оба пробных шага оказались неудачными, полагаем $t_{20}=t_{21}$ и в окрестности этой точки выполняем пробные шаги по переменной x_2. $t_{21}-\delta_2=(2,5)$; $f(t_{21}-\delta_2)=129$. Улучшение достигнуто, поэтому $t_{21}-\delta_2=t_{22}=b_3$. И новый шаг делаем в направлении вектора b_2b_3 и определяем координаты точки $t_{30}=2b_3-b_2=2(2,5)-(3,7)=(1,3)$. Отсюда $f(t_{30})=59$. Уменьшение отклика вновь достигнуто. В том же порядке находим $t_{30}-\delta_1=(0,3)$; $f(t_{30}-\delta_1)=73$ и $t_{30}+\delta_1=(2,3)$; $f(t_{30}+\delta_1)=81$. Т.к. пробные шаги по переменной x_1 неудачны, полагаем $t_{30}=t_{31}$ и делаем пробные шаги по переменной x_2. $t_{31}-\delta_2=(1,2)$; $f(t_{31}-\delta_2)=52$. Следовательно координаты четвертой базовой точки можно считать найденными $t_{31}-\delta_2=t_{32}=b_4$ и, таким образом, $t_{40}=2b_4-b_3=2(1,2)-(2,5)=(0,-1)$, а $f(t_{40}=17)$. Пробный шаг по первой переменной дает точку $t_{40}-\delta_1=(-1,-1)$, где $f(t_{40}-\delta_1)=15$. Т.к. убывание целевой функции есть, полагаем $t_{40}-\delta_1=t_{41}$. Пробный шаг по переменной x_2 из точки t_{41} приводит к точке $t_{41}-\delta_2=(-1,-2)$, в которой $f(t_{41}-\delta_2)=12$. Т.е. поиск можно считать завершенным, ибо он привел к точке x^*, которая является точкой глобального минимума и, следовательно, решением оптимизационной задачи.

Метод сканирования. Если гипотеза об унимодальности функции отклика представляется сомнительной, то для решения задачи нелинейного программирования применяется метод сканирования. Основная идея его состоит в том, что область поиска по всему множеству независимых переменных $\{x_i\}$ $i=\overline{1,n}$ разбивается на отрезки длиной $\{h_i\}$ $i=\overline{1,n}$. Фактически это означает, что область, где производится поиск, накрывается сеткой, в узлах которой определяются значения целевой функции. Часть пространства, ограниченная узлами, геометрический центр которых содержит узел с наилучшим в некоторой окрестности значением целевой функции, будет являться зоной оптимума. Посредством этой процедуры можно выявить все оптимумы целевой функции, и установить какой из них является глобальным. Уточнение положения оптимума достигается путем покрытия зоны интересующего нас оптимума сеткой с более мелкими ячейками. Единственным, хотя и весьма существенным, недостатком метода сканирования является резкое возрастание трудоемкости процедуры поиска с увеличением размерности факторного пространства.

4.7. Методы первого порядка

Дифференцируемость целевой функции значительно расширяет возможности решения экстремальных задач, позволяя использовать для построения вычислительных алгоритмов мощный аппарат классической математики. Как известно из курса математического анализа скорость изменения функции в некоторой точке, где функция определена, измеряется абсолютной величиной производной функции в этой точке, а знак производной указывает характер изменения (возрастание или убывание). Если аналитическое выражение функции неизвестно, точное вычисление производной невозможно. В этом случае производную определяют приближенно по формуле

$$y' \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}.$$

Естественно, что чем ближе друг к другу точки x_0 и x_1, тем выше точность вычислений. Однако, длина интервала Δx должна быть достаточной для обнаружения различия между значениями функции в точках замеров на фоне случайных помех. Для функции многих переменных $y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ скорость изменения зависит от изменения всех факторных переменных x_i $i = \overline{1,n}$. Это обстоятельство существенно используется при построении процедур поиска оптимума.

Метод релаксации. Пусть $f(x_1, x_2,...,x_n)$ функция, для которой поставлена задача оптимизации, определена на множестве $X \subset R^n$ и имеет производные первого порядка по всем факторным переменным в каждой точке этого множества. Для определенности будем решать задачу отыскания $max\, f(x_1,x_2,...x_n)$. Сформулируем процесс решения в виде последовательности действий.

1. Выбирается некоторая произвольная точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in X$ и в этой точке вычисляется значение функции отклика $f(x^0)$.

2. В точке x^0 вычисляются частные производные функции по всем факторным переменным $\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x=x_0} \right\}$ $i = \overline{1,n}$ и из них выбирается наибольшая по модулю. Она соответствует переменной, в направлении которой происходит наискорейшее изменение целевой функции при движении из точки x^0.

3. Пусть таковой оказалась i-ая переменная. Все факторы кроме i-ого фиксируются на исходном уровне, т.е. в положении $x_1^0, x_2^0, ...x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, ...x_n^0$, а переменная x_i изменяется в направлении роста функции отклика с некоторым шагом h_i. Для контроля изменения функции отклика после каждого шага заново пересчитывается ее значение.

4. После того, как на очередном шаге рост целевой функции прекратится, i-ая переменная фиксируется на уровне $x_i^1 = x_i^0 + kh_i$, где k–число шагов, сделанных из точки x^0. В точке с координатами $x_1^0, x_2^0, ...x_i^1, ...x_n^0$ вычисляются частные производные по всем факторным переменным, кроме i-ой, и все действия, описанные в п.п. 2 и 3, повторяются в том же порядке для другой переменной.

5. Результатом последовательного применения n раз указанной процедуры становится точка $x^1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$, где $f(x^1) > f(x^0)$. В этой точке все операции, поименованные в п.п. 2–4, выполняются снова в том же порядке вплоть до получения координат точки $x^2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$, где $f(x^2) > f(x^1)$.

6. Процесс продолжается до тех пор, пока не будут исчерпаны все возможности улучшения оптимизируемой функции, т.е. когда после очередной итерации оказывается, что $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon$, где ε – требуемая точность отыскания оптимума. Следует отметить, однако, что если целевая функция имеет овражную структуру, то такая ситуация может возникнуть на достаточно большом удалении от оптимума. Поэтому в качестве количественного критерия завершения процесса поиска оптимума, чаще применяется соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 < \varepsilon .$$

Фактически это требование означает близость нулю всех частных производных функции отклика, т.е. выполнение необходимого признака существования экстремума функции многих переменных. Нетрудно заметить, что во всех основных чертах метод релаксации идентичен методу Зейделя. Отличие состоит лишь в неслучайном выборе координаты, с которой начинается оптимизационная процедура. Так же как и в методе Зейделя наличие у целевой функции особенностей в виде гребня (оврага) ведет к значительному увеличению числа итерационных циклов, увеличивая трудоемкость процесса вычислений.

Метод подъёма (спуска). Недостатком метода релаксации является необходимость последовательного движения поочередно вдоль всех факторных координат, хотя, как известно из курса математического анализа, направление наискорейшего роста любой дифференцируемой функции определяется вектором градиента. Градиентом функции $f(x_1, x_2, ...x_n)$; *grad* $f(x)$ называется n-мерный вектор, компонентами которого являются частные производные функции *f(x)* по всем факторным переменным. Таким образом, по определению $grad\ f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Принимая это во внимание, можно построить следующую процедуру отыскания оптимума:

1. Как и в методе релаксации, выбирается точка $x^0 \in X$ и в этой точке определяется значение целевой функции $f(x^0)$.

2. Вычисляется значение градиента функции в точке x^0 $grad\,f(x^0)$.

3. Координаты новой точки x^1 вычисляются по формуле $x^1 = x^0 + \alpha\, gradf(x^0)$, где α – длина шага, из точки x^0 в направлении градиента.

<u>Замечание.</u> Если целью оптимизации является отыскание минимума функции отклика, то шаг выполняется в противоположную сторону в направлении <u>антиградиента</u>, а формула для отыскания координат новой точки, принимает вид $x^1 = x^0 - \alpha\, grad\,f(x^0)$.

4. Действия, описанные в п.п. 2, 3 повторяются последовательно для каждой вновь найденной точки до тех пор, пока не будет выполнено требование заданной точности приближения к оптимуму. Они аналогичны количественным критериям окончания поиска в методе релаксации и выражаются соотношением

$$|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 < \varepsilon.$$

Повышение точности счета может быть достигнуто путем дробления шага. Нельзя не упомянуть, что вопрос выбора длины шага является, несомненно, самым важным и острым в части практической реализации метода подъема. Дело в том, что подавляющее большинство рекомендаций, касающихся выбора длины шага, опираются на оценки, получение которых в процессе решения крайне затруднительно. Поэтому на практике этот выбор зависит от надежности сведений об особенностях целевой функции, которыми располагает исследователь, а также его опыта и интуиции.

Замечание. Эффективность метода при наличии гребней (оврагов) у целевой функции заметно снижается как и в методе релаксации.

Пример 17. Методом подъема найти $max\ f = 4x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$. Выберем в качестве начальной точки x^0 = (5,10), длину шага примем $\alpha = \frac{1}{8}$ и используем итерационную процедуру метода подъема. Вычислим вектор градиента функции f: $grad\ f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$ = ($4x_1$ + 4, $-4x_2$ + 8).

Подставляя координаты начальной точки, получим: $grad\ f(x^0)$ = (–16, –32). Координаты новой точки определятся соотношением x^1 = x^0 + α $grad\ f(x^0)$ = (5,10) + $\frac{1}{8}$(–16,–32) = (3,6). Эффективность шага оценим по величине приращения функции $\Delta f_1 = f(x^1) - f(x^0) = -30 - (-150) = 120$. Рост функции отклика составил 120 единиц. Следующий шаг поиска осуществляем из точки x^1=(3,6). $grad\ f(x^1)$ = (–8, –16). Сохраняя прежнюю длину шага определим координаты новой точки x^2 = x^1 + α $grad\ f(x^1)$ = (3,6)+$\frac{1}{8}$(–8,–16)=(2,4). Вычисляем приращение функции $\Delta f_2 = f(x^2) - f(x^1) = 0 - (-30) = 30$. Действуя аналогично, получим

$$x^3 = x^2 + \alpha\ grad\ f(x^2) = (2,4) + \frac{1}{8}(4,8) = (1,5,3).$$

Приращение функции $\Delta f_3 = f(x^3) - f(x^2) = 7{,}5 - 0 = 7{,}5$. Итерационный процесс продолжается вплоть до достижения требуемого уровня точности, что является вопросом количества шагов.

Метод наискорейшего подъёма (спуска). Как упоминалось выше, **эвристический** подход к выбору длины шага не всегда продуктивен. Исключим влияние субъективного фактора, выбирая длину шага из условия $\Delta f_{k+1} = |f(x^{k+1}) - f(x^k)| \to max$, т.е. добиваясь на каждом шаге максимально возможного изменения целевой функции. Фактически это означает решение еще одной оптимизационной задачи: отыскания длины шага в направление градиента, при которой изменение целевой функции будет наибольшим. Рассмотрим, как формируется приращение целевой функции от одного шага итерации к другому

$$\Delta f_{k+1} = f(x^{k+1}) - f(x^k) = f(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) - f(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k).$$

Полагая длину шага в методе подъема при движении из точки x^k в точку x^{k+1} равной α_k, и, используя основное итерационное соотношение метода, получим:

$$\Delta f_{k+1} = f\left(x_1^k + \alpha_k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1}, x_2^k + \alpha_k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_2}, \ldots x_n^k + \alpha_k \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_n}\right) - f(x_1^k, x_2^k, \ldots x_n^k).$$

Таким образом, приращение функции при использовании алгоритма метода подъема есть некоторая функция длины шага α_k. Используя необходимый признак существования экстремума, отыскиваем $max\,\Delta f_{k+1}$. Дифференцируем приращения функции Δf_{k+1} по α_k, как по независимой переменной и, требуя равенства нулю производной, определяем длину шага α_k, доставляющую максимум величине Δf_{k+1}. Дифференцируя Δf_{k+1}, как сложную функцию имеем

$$\frac{d(\Delta f_{k+1})}{d\alpha_k} = \frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f(x^{k+1})}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_n} = 0$$

Обращаясь к определению градиента, легко заметить, что результатом дифференцирования стало скалярное произведение векторов градиентов функции отклика в соседних точках итерации. А условие максимизации приращения функции отклика в оптимизационной процедуре метода подъема можно компактно записать в виде:

$<grad\, f(x^{k+1}), grad\, f(x^k)> = 0.$

Это условие имеет простое геометрическое содержание: для того, чтобы приращение целевой функции при движении в направлении градиента было наибольшим, необходимо выбирать длину шага так, чтобы в соседних точках итерации x^{k+1} и x^k векторы градиентов функции $f(x)$ были ортогональны. Рассмотренный метод называется методом наискорейшего подъема, а при решении оптимизационной задачи на отыскание минимума, – наискорейшего спуска.

Пример 17а. В условиях примера 17 использовать метод наискорейшего подъема. Как уже было вычислено $grad\, f(x^0) = (-16,-32)$. Координаты следующей точки $x^1 = x^0 + \alpha_0\, grad\, f(x^0)$, т.е. будут зависеть от длины шага α_0 $x^1 = (5,10) + \alpha_0\,(-16,-32) = (5-16\alpha_0,\, 10-32\alpha_0)$. Используя найденное в примере 17 выражение для градиента целевой функции $grad\, f(x) = (-4x_1+4,-4x_2+8)$, и, подставляя в него координаты точки x^1, получим:

$grad\, f(x^1) = (-4(5-16\alpha_0)+4,\, -4(10-32\alpha_0)+8)=(-16+64\alpha_0,\, -32+128\alpha_0)$ и из условия ортогональности градиентов в точках x^0 и x^1 найдем длину шага α_0

$< grad\, f(x^1), grad\, f(x^0)>=<(-16+64\alpha_0,\, -32+128\alpha_0), (-16,-32)>=0.$

Выполняя операцию скалярного произведения векторов, приходим к алгебраическому уравнению относительно α_0. $256(1-4\alpha_0+4-16\alpha_0)=0$, откуда $\alpha_0 = \frac{1}{4}$. Таким образом координаты точки x^1 будут: $x^1=(5,10)+\frac{1}{4}(-16,-32)=(1,2)$. Значение целевой функции в этой точке $f(x^1)=10$. Нетрудно убедиться, что $grad\, f(x^1)=(-4\cdot 1+4,\, -4\cdot 2+8)=(0,0)$. Следовательно точка x^1 есть точка максимума функции отклика, а решение оптимизационной задачи закончено.

Пример 18. Методом наискорейшего спуска найти $min\, f = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_2^2 - 6x_1 - 4x_2$. С точностью до ε=0,2. В качестве начального приближения взять точку x^0=(8,4). Используя классические методы оптимизации легко найти точку, в которой функция f достигает минимального значения. Это $x^*=(2,\ 0{,}5)$. $f(x^*)=f_{min}=-7$. $grad\, f(x)=(4x_1-4x_2-6,\ -4x_1+24x_2-4)$. Вычислим $f(x^0)=120$ и $grad\ f(x^0)=(10{,}60)$. Применяя алгоритм наискорейшего спуска, получим: $x^1=x^0+\alpha_0\ grad\, f(x^0)=(8{,}4)-\alpha_0(10{,}60) = (8-10\alpha_0,\ 4-60\alpha_0)$.

Используя выражение для вычисления градиента, находим grad $f(x^1)=(10+200\alpha_0,\ 60-1400\alpha_0)$. И из условия ортогональности градиентов $< grad\, f(x^0),\ grad\, f(x^1)>=[10(10+200\alpha_0)+60(60-1400\alpha_0)]=0$. Откуда $8200\alpha_0=370$; $\alpha_0\cong 0{,}045$. И, таким образом координаты точки $x^1(7{,}55,\ 1{,}3)$; $f(x^1)=44{,}525$; $grad\ f(x^1)=(19,-3)$. Выполняя второй шаг решения, найдем $x^2=x^1-\alpha_1\ grad\, f(x^1)=(7{,}55,\ 1{,}3)-\alpha_1(19,\ -3) = (7{,}55-19\alpha_1,\ 1{,}3+3\alpha_1)$. И далее $grad\ f(x^2)=(19-88\alpha_1,\ -3+148\alpha_1)$. Требуя ортогональности градиентов, получим: $< grad\, f(x^1),\ grad\, f(x^2)>=(361-1672\alpha_1+9-444\alpha_1)=0$. Откуда $\alpha_1\cong 0{,}175$ и $x^2=(4{,}23,\ 1{,}83)$; $f(x^2)=12{,}309$; grad $f(x^2)=(3{,}6,\ 22{,}9)$. Результаты дальнейших вычислений представлены на рис. 4.7.

Координаты точек x^i	x_1	8	7,55	4,23	4,07	2,82	2,76	2,3	2,28
	x_2	4	1,3	1,83	0,8	0,99	0,61	0,68	0,54
Значение функции отклика $f(x^i)$		128	44,525	12,309	0,166	–4,38	–6,03	–6,65	–6,87
Длина шага α_i		0,045	0,175	0,045	0,177	0,045	0,177	0,045	
Векторы градиента	x_1	10	19	3,6	7,07	1,31	2,60	0,48	0,95
	x_2	60	–3	22,9	–1,08	8,51	–0,4	3,1	–0,14

Рис. 4.7. Результаты вычислений

Данные таблицы показывают, что на седьмом шаге в точке $x^7=(2{,}28;0{,}54)$ требуется точность отыскания минимума достигается $|\,f(x^7)-f_{min}\,|=0{,}13<0{,}2$. Решение оптимизационной задачи можно считать законченным.

Метод проекции градиента. В значительном большинстве практических задач оптимизации в силу конкретных экономических, технических и прочих особенностей моделируемых ситуаций область изменения факторных переменных ограничена. То есть множество допустимых значений факторных переменных X не совпадает с пространством R^n. Это, с одной стороны, устраняет необходимость проверки ограниченности целевой функции, а с другой превращает задачу безусловной оптимизации в задачу оптимизации условной.

Определение. Проекцией точки у на множество X называется точка $y \in X$ такая, что $d(y, y) = min\, d(y, x)$ для любого $x \in X$. (Символом d обозначается расстояние между точками). Это понятие, также как и операция проектирования, существенно используется при построении вычислительной процедуры поиска оптимума в методе подъема (спуска), модернизированном применительно к задаче с ограничениями. Рассмотрим подробно механизм действия этой процедуры на примере отыскания максимума функции $f(x)$ при условии $x \in X$.

1. Пусть на k-ом шаге поиска оптимума, например, методом наискорейшего подъема, была получена точка $x^k \in X$.

2. Обычным порядком выполняется следующий шаг итерационного процесса и находится положение точки x^{k+1} по формуле $x^{k+1} = x^k + \alpha_k gradf(x^k)$.

3. Если $x^{k+1} \in X$, – процесс поиска продолжается в режиме обычного метода наискорейшего подъема.

4. Если же точка x^{k+1} оказалась вне пределов множества X, то находится ее проекция на множестве X точка x^{k+1}, которая используется для нахождения следующей точки по той же формуле $x^{k+2} = x^{k+1} + \alpha_{k+1} gradf(x^{k+1})$.

В общем случае операция проектирования точки на множество может представлять самостоятельную, причем достаточно сложную, оптимизационную задачу, подчас не имеющую единственного решения. Однако, если множество X выпукло, то проекция находится как точка пересечения нормали, проведенной из точки проектирования, с поверхностью, ограничивающей множество *X*. Поиск считается завершенным, а решение задачи условной оптимизации найденным, когда две последовательно отысканные проекции x^k и x^{k+1} окажутся внутри некоторой ε – окрестности, где ε величина заранее заданного евклидова расстояния, определяющая желаемую точность вычислений. Так как процесс проектирования осуществляется в направлении вектора нормали $\overline{n}_k$ к поверхности, ограничивающей множество *X* в точке x_k, а новый шаг метода подъема выполняется в направлении вектора $gradf(x_k)$, то для совпадения точек x^k и x^{k+1} необходима коллинеарность векторов $\overline{n}_k$ и $gradf(x_k)$. Или, если обозначить $\overline{r}_k$ вектор касательный к поверхности, ограничивающей множество *X* в точке x^k, то условием совпадения двух последовательных проекций, будет ортогональность векторов $\overline{r}_k$ и $gradf(x_k)$. Алгебраически это условие может быть записано в виде: $\left|<\overline{r}_k, gradf(x_k)>\right| < \delta$, где $\delta=\delta(\varepsilon)$ причем при $\varepsilon\to 0$ должно иметь место $\delta\to 0$.

Пример 19. Найти $max\, f = x_1 + 2x_2 - 0{,}2x_1^2 - 0{,}2x_2^2$. При ограничениях φ_1: $x_1+4x_2\le 14$; φ_2: $7x_1+3x_2\le 42$; $x_1\ge 0$; $x_2\ge 0$. Поиск начать из точки $x^0=(1,1)$. Легко проверить, что точка x^0 принадлежит области, задаваемой ограничениями. $f(x^0)=2{,}6$. Используем метод наискорейшего подъема. $grad\ f(x)=(1–0{,}4x_1,\ 2–0{,}4x_2)$. Тогда в исходной точке $grad\, f(x^0)= (0{,}6,\ 1{,}6)$. Координаты новой точки будут $x^1 = x^0 + \alpha_0\, grad\, f(x^0) = (1,1) + \alpha_0(0{,}6,\ 1{,}6) = (1+0{,}6\alpha_0, 1+1{,}6\alpha_0)$. Требуя ортогональности векторов градиентов в точках x^0 и x^1, получим: $<grad\ f(x^0),\ grad\ f(x^1)> = (0{,}36–0{,}144\alpha_0+2{,}56–1{,}024\alpha_0)=0$. Откуда $\alpha_0=2{,}5$. Таким образом координаты точки x^1 будут $x^1=(1,1)+2{,}5(0{,}6,\ 1{,}6)=(2{,}5,\ 5)$ и $f(x^1)=6{,}25$. Точка x^1 лежит вне пределов области, задаваемой ограничениями. Нарушено ограничение φ_1. Действительно: $2{,}5+4\cdot 5=22{,}5>14$. Находим проекцию точки x^1 на прямую $x_1+4x_2=14$.

Проектирование точки x^1 осуществляем в направлении нормали к прямой $x_1+4x_2=14$, которая определяется вектором $\bar{n}_1=(1,4)$. Практически это означает построение прямой, проходящей через точку $x^1=(2{,}5,\ 5)$ перпендикулярно прямой $x_1+4x_2=14$. Используя известные результаты из курса аналитической геометрии, получим уравнение искомой линии проектирования $x_2-5=4(x_1-2{,}5)$ или $4x_1-x_2=5$. Координаты точки x^1 находим как координаты точки пересечения прямых $x_1+4x_2=14$ и $4x_1-x_2=5$. В итоге $\tilde{x}^1=(2{,}3)$. Нетрудно проверить, что найденная точка удовлетворяет всем ограничениям исходной задачи. Вектор градиента функции отклика в найденной точке grad $f(\tilde{x}^1)=(0{,}2,\ 0{,}8)$. Вектор же $\bar{r}_1$, как ортогональный вектор $\bar{n}_1$, имеет координаты: $\bar{r}_1=(-4{,}1)$. Проверяем критерий окончания поиска: $<\bar{r}_1,\ grad f(\tilde{x}^1)>=\ (-4\cdot 0{,}2+0{,}8\cdot 1)=0$. Следовательно, точка $x^1=(2{,}3)$ является точкой условного максимума в исследуемой области $f(\tilde{x}^1)=5{,}4$.

Пример 20. Найти $max\, f=-3x_1^2+2x_1x_2-2x_2^2+5x_1-4x_2$ при ограничении $\varphi: x_1^2-4x_2\geq 8$. Вычисления закончить при выполнении условия $|<\bar{r}_i,\ grad\, f(\tilde{x}_i)>|<1$. Поиск начать из точки $x^0=(8{,}8)$. Точка x^0 принадлежит области, задаваемой ограничением и $f(x^0)=-184$. Выполняя шаг наискорейшего подъема, находим grad $f(x)=(-6x_1+2x_2+5{,}2x_1-4x_2-4)$ и по основной итерационной формуле $x^1=x^0+\alpha_0$ $grad\ f(x^0)$ находим $\alpha_0=0{,}296$ и $x^1=(0,\ 2{,}1)$. Координаты этой точки нарушают действующее ограничение, поэтому проектируем ее в направлении нормали к линии $x_1^2-4x_2=8$, которая задается вектором $grad\ \varphi=(2x_1,\ -4)$, или, что тоже самое, ортогонально вектору $\bar{r}(x)=(4,\ 2x_1)$. В точке x^1 $grad\ \varphi(x^1)=(0,-4)$, следовательно, в соответствии с известными положениями аналитической геометрии, проектирование осуществляется вдоль оси ox_2 вплоть до пересечения с линией $x_1^2-4x_2=8$. Точка пересечения и будет проекцией точки x^1 на множество, задаваемое ограничением φ. Совместное решение уравнений x_1=0 и $x_1^2-4x_2=8$ дает координаты точки $x_1=(0,-2)$. $f(\tilde{x}^1)$=0. $grad\, f(\tilde{x}^1)$=(1,4); $\bar{r}_1=(4,0)$. $<\bar{r}_1, grad\, f(\tilde{x}^1)>$=4. Условие окончания поиска не выполнено. Методом наискорейшего подъема найдем $x^2=x_1+\alpha_1 gradf(x_1)$. Из условия $<grad\, f(\tilde{x}^1), grad\, f(x^2)>$=0 находим α_1=0,315 и координаты точки x^2=(0,315, –0,74). Эта точка не принадлежит множеству допустимых значений факторных переменных, т.к. $(0{,}315)^2$–4(–0,74)=3,16<8. Проектируем точку x^2 на линию $x_1^2-4x_2=8$ в направлении вектора $grad\ \varphi(x^2)$=(0,63, –4). Прямая, вдоль которой осуществляется проектирование, задается уравнением x_2+0,74=–6,35(x_1–-0,315) или x_2=–6,35x_1+1,26. Совместное решение уравнений x_2=–6,35x_1+1,26 и $x_1^2-4x_2=8$ дает координаты точки x^2=(0,5, –1,915). $f(x^2)$=0,161. $grad\, f(x^2)$=(–1,83, 4,66); $\bar{r}_2=(4,1)$. Отсюда $<\bar{r}_2$, $grad\ f(x^2)>$=–2,66. Условие окончания поиска опять не выполнено. Находим координаты следующей точки $x^3=x^2+\alpha_2 gradf(x^2)$. Из условия ортогональности векторов градиентов в точках x^2 и x^3 определяем α_2=0,178 и координаты точки x^3=(0,174, –1,086). Нетрудно убедиться, что и эта точка не принадлежит области, задаваемой ограничением. Проектируем её на линию ограничения в направлении вектора grad$\phi(x^3)$ =(0,348, –4). Прямая, вдоль которой осуществляется проектирование, задается уравнением x_2+1,086=–11,5(x_1–0,174) или x_2=–11,5x_1+0,915. Совместное решение уравнений x_2=–11,5x_1+0,915 и $x_1^2-4x_2=8$ дает координаты точки $x_3=(0{,}25,-1{,}96)$. $f(x_3)$=0,239. $grad\ f(x_3)$=(–0,42, 4,34); $\bar{r}_3$=(4, 0,5). Отсюда $<\bar{r}_3$, $grad\ f(x_3)>$=0,49. Условие окончания поиска выполнено. Точка $\tilde{x}_3$=(0,25, –1,96) признается точкой условного максимума – решением задачи нелинейного программирования.

Метод штрафных функций. Как отмечалось выше, если вид ограничений, определяющих область задания факторных переменных сложен, то проектирование затруднительно, а в ряде случаев оказывается невозможно получение однозначного результата. Метод штрафных функций свободен от этих недостатков. Идея его состоит в том, что вместо задачи $min\ f(x);\ x\in X$ предлагается к решению задача $min\ F(x,r)$, где $F(x,r)=f(x)+r\Phi(x)$. Функция $\Phi(x)$ называется штрафом и формируется по правилу

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\in X \\ >0 & \text{при} \quad x\notin X, \quad r>0 \end{cases},$$

а r – коэффициентом штрафа.

Фактически это означает замену задачи условной оптимизации на задачу безусловной оптимизации. Функция $F(x,r)$, для которой эта задача решается, носит название штрафной функции. Обычный вид штрафа $\Phi(x)$, используемый при ограничениях типа $\varphi_i(x) \le 0 \;\; i=\overline{1,m}$, задается выражением $\Phi(x)=\sum_{i=1}^{m}[max\{0,\varphi_i(x)\}]^{\alpha}$, где α, в зависимости от конкретного вида ограничений, выбирается либо 1, либо 2. Т.е., если ограничения не нарушены, $\varphi_i(x) \le 0$, то штраф равен нулю. Если же для некоторых i $\varphi_i(x)>0$, то эти ограничения и формируют штраф. Алгоритм решения оптимизационной задачи методом штрафных функций может быть представлен в виде следующей последовательности действий:

1. Проверяется тот факт, что решение задачи (точка максимума или минимума) x^0 лежит вне области, задаваемой ограничениями.

2. Строится некоторая возрастающая последовательность чисел $\{r_k\}$ k=1,2,… и для r_1 решается задача min $F(x, r_1)=f(x)+r_1\Phi(x)$. То есть из точки x^* выполняется шаг методом наискорейшего спуска для функции $F(x,r_1)$.

3. Полученный результат в какой то точке $\widetilde{x}^1$ используется в качестве исходного решения новой задачи оптимизации $min\ F(x,r_2) = f(x) + r_2\Phi(x)$, причем $r_2 > r_1$.

4. Последовательность решаемых задач оптимизации $min\ F(x,r_k)$ позволяет получить релаксационную последовательность точек $\{x^k\}$, сходящуюся к точке $x^* \in X$.

Пример 21. Методом штрафных функций найти минимум функции $f = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_2^2 - 6x_1 - 4x_2$ при ограничениях $x_1–2 \le 0$; $x_1+x_2–1 \le 0$. Процесс поиска продолжить вплоть до шестого шага. Используя необходимый признак существования экстремума функции многих переменных, можно убедиться, что функция отклика достигает минимума в точке $x^0 = (2,\ 0,5)$. В этой точке $f(x^0) = –7$. Нарушенным оказывается второе ограничение: $2 + 0,5 – 1 = 1 > 0$. Строим возрастающую последовательность $\{r_k\}$, полагая $r_1=2$, по закону $r_{k+1}=r_k+2$. И, поскольку в точке x^0 нарушено только второе ограничение, штрафная функция будет иметь вид

$$F(x,r_1) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + r_1(x_1 + x_2 - 1)^2.$$

Или, подставляя $r_1=2$, $F(x,r_1) = 4x_1^2 + 14x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 2$.

Используя, например, алгоритм метода наискорейшего спуска делаем шаг в направлении антиградиента функции $F(x,r_1)$ из точки $x^0=(2,\ 0,5)$. $grad\ F(x,r_1)=(8x_1–10,\ 28x_2–8)$. Отсюда $grad\ F(x^0,r_1)=(6,6)$. Координаты новой точки, в соответствии с процедурой метода наискорейшего спуска, будут $x^1=x^0–\alpha_0 grad\ F(x^0,r_1)=(2–6\alpha_0,\ 0,5–6\alpha_0)$. Из условия ортогональности векторов градиентов в точках x^0 и x^1 определим α_0 $< grad\ F(x^0,r_1),\ grad\ F(x^1,r_1)>=36–288\alpha_0+36–1008\alpha_0=0$. Следовательно, $\alpha_0 = \dfrac{1}{18}$ и, таким образом $x^1 = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{1}{6}\right)$, а $f(x^1)=–5,89$. Точка x^1 также нарушает второе ограничение, но лежит ближе к границе, чем точка x^0. Взяв новый член последовательности $r_2=r_1+2=4$, строим новую штрафную функцию

$F(x,r_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + r_2(x_1 + x_2 - 1)^2 = 6x_1^2 +$
$+4x_1x_2 + 16x_2^2 - 14x_1 - 12x_2 + 4.$

Новый шаг наискорейшего спуска выполняется из точки x^1 в направлении антиградиента функции $F(x,r_2)$. Находим $grad\ F(x,r_2)=(12x_1+4x_2-14,\ 4x_1+32x_2-12)$. И далее $grad\ F(x^1,r_2)=\left(\frac{20}{3},0\right)$,

$x^2 = x^1 - \alpha_1 gradF(x^1,r_2) = \left(\frac{5}{3} - \frac{20}{3}\alpha_1, \frac{1}{6}\right)$;

$gradF(x^2,r_2) = \left(\frac{20}{3} - 80\alpha_1, -\frac{80}{3}\alpha_1\right)$. Условие ортогональности градиентов позволяет найти α_1.

$< grad\ F(x^1,r_2),\ grad\ F(x^2,r_2) > = \frac{400}{9} - \frac{1600}{3}\alpha_1 = 0$. Отсюда $\alpha_1 = \frac{1}{12}$ и $x^2 = \left(\frac{10}{9}, \frac{1}{6}\right)$, $f(x^2) = -5{,}27$. Результаты вычислений всех точек траектории представлены на рис. 4.8, из материалов которой видно, что $|f(x^5) - f(x^6)| = 0{,}09$, а $|x^5 - x^6| \cong 0{,}032$.

Номера точек		x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
Координаты точек x^i	x_1	2	1,667	1,111	1,05	1,01	0,975	0,943
	x_2	0,5	0,167	0,167	0,228	0,187	0,176	0,178
Значение функции отклика $f(x^i)$		–7	–5,89	–5,27	–5,34	–5,10	–4,97	–4,88
Длина шага α_i		0,055	0,083	0,055	0,024	0,0286	0,039	
r_i			2	4	6	8	10	12
Величина нарушения ограничений		1,5	0,834	0,278	0,278	0,197	0,151	0,121

Рис. 4.7. Результаты вычислений всех точек траектории

Если аналитическое выражение функции отклика и ограничений известны, то становится возможным точное решение оптимизационной задачи методом штрафных функций.

Пример 21а. В условиях примера 21 найти точное решение оптимизационной задачи. Запишем штрафную функцию в самом общем виде:

$F(x,r)=2x_1^2-4x_1x_2+12x_2^2-6x_1-4x_2+r[(x_1-2)^2+(x_1+x_2-1)^2]$ и рассмотрим все возможные ситуации с ограничениями.

1. Оба ограничения выполнены. Тогда штраф $\Phi(x)\equiv 0$. В этом случае точка оптимума находится как решение системы уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(x,r)}{\partial x_1}=4x_1-4x_2-6=0\\ \dfrac{\partial F(x,r)}{\partial x_2}=-4x_1+24x_2-4=0\end{cases}.$$

Отсюда $x_1^*=2;\ x_2^*=0{,}5$. В этой точке второе ограничение оказывается нарушенным, а, следовательно, она не является решением задачи.

2. Нарушено первое ограничение. Тогда штраф $\Phi(x)=(x_1-2)^2$. Система уравнений для отыскания координат точки x^* в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{\partial F(x,r)}{\partial x_1}=4x_1-4x_2-6+2r(x_1-2)=0$$

$$\frac{\partial F(x,r)}{\partial x_2}=-4x_1+24x_2-4=0$$

Т.к. $\{r_k\}$ по условию является бесконечной возрастающей последовательностью, то можно положить $r\to\infty$.

Тогда первое уравнение системы имеет смысл только при $x_1-2=0$, или $x_1=2$. Подставляя во второе уравнение, получим $x_2=0{,}5$. Отсюда $x_1^*=2;\ x_2^*=0{,}5$. В этой точке нарушено второе ограничение, следовательно, она не является решением оптимизационной задачи.

3. Нарушено второе ограничение. Штраф $\Phi(x)=(x_1+x_2-1)^2$. Система уравнений для отыскания координат точки x* будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,r)}{\partial x_1} = 4x_1 - 4x_2 - 6 + 2r(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x,r)}{\partial x_2} = -4x_1 + 24x_2 - 4 + 2r(x_1 + x_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

При $r \to \infty$ система имеет смысл только если $x_1+x_2-1=0$. Исключим параметр r.

Для этого вычтем второе уравнение из первого, $-8x_1-28x_2-2=0$. В результате для нахождения координат точки x^* получим систему уравнений:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 8x_1 - 28x_2 = 2 \end{cases}$. Отсюда $x_1^* = \dfrac{5}{6}; x_2^* = \dfrac{1}{6}$. Эта точка может являться решением оптимизационной задачи, поскольку ее координаты удовлетворяют обоим ограничениям. $f(x^*) = -4{,}5$.

4. Нарушены оба ограничения. В этом случае, по определению штрафа, $\Phi(x)=(x_1-2)^2+(x_1+x_2-1)^2$. Система уравнений для определения координат точки x^* будет:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,r)}{\partial x_1} = 4x_1 - 4x_2 - 6 + 2r(x_1 - 2) + 2r(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x,r)}{\partial x_2} = -4x_1 + 24x_2 - 4 + 2r(x_1 + x_2 - 1) = 0 \end{cases}.$$

Требуя выполнения условия $r \to \infty$, получаем систему двух уравнений вида:

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$. Отсюда $x_1^* = 2; x_2^* = -1$. Оба ограничения удовлетворены, следовательно, точка может быть решением оптимизационной задачи. Но, так как в этой точке $f(x^*)=20$, $(20 > -4{,}5)$, решением задачи, т.е. точкой условного минимума функции

$f = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_2^2 - 6x_1 - 4x_2$ признается точка с координатами $x_1^* = \frac{5}{6}$; $x_2^* = \frac{1}{6}$.

При использовании для решения задачи нелинейного программирования метода штрафных функций, координаты точки условного оптимума, как правило, принадлежат границе множества допустимых значений функции отклика, причем процесс последовательного приближения к ней (см. данные табл. 12) ведется вне пределов множества допустимых значений. Поэтому метод штрафных функций называется так же методом внешней точки.

Замечание. При практическом использовании метода штрафных функций следует иметь в виду, что с каждым новым шагом итерации (увеличением коэффициента штрафа), штрафная функция *F(x,r)* меняется, приобретая все более ярко выраженную «овражную» структуру. Это может существенно замедлить процесс поиска решения и даже стать причиной его остановки, ввиду того, что изменения функции отклика от точки к точке становятся неразличимы на фоне случайных ошибок измерения и погрешностей вычисления.

Метод барьерных функций. Если ограничения задачи нелинейного программирования заданы в виде строгих неравенств, то метод штрафных функций непригоден для использования, ввиду того, что, как было отмечено выше, поиск, как правило, приводит в точку, расположенную на границе множества *X*. В этом случае процедура поиска должна осуществляться только по внутренним точкам множества допустимых значений целевой функции и в одной из них заканчиваться. Для этого строят специальные барьерные функции *I(x)*, неограниченно возрастающие по мере приближения к границе. И вместо задачи условной оптимизации отыскания *max(min) f(x)* при ограничениях $\varphi_i(x) \le 0$ $i = \overline{1,m}$ решается задача безусловной оптимизации *max(min) u(x,r)*, где $u(x,r) = f(x) \mp rI(x)$. Типичными примерами барьерных функций, наиболее часто используемых при решении задач оптимизации, являются функции $-\sum_{i=1}^{m} ln(-\varphi_i(x))$ и $-\sum_{i=1}^{m} (\varphi_i(x))^{-1}$. При приближении факторной переменной к одной из поверхностей, задаваемых уравнениями $\varphi_i(x)=0$, барьерная функция быстро возрастает, а при попадании на поверхность обращается в ∞. Рассмотрим этапы решения оптимизационной задачи $min\ f(x)\ x\in X$ методом барьерных функций.

1. Строится убывающая последовательность $\{r_k\}$ k=1,2,…, такая, что $r_k\to 0$ при $k\to\infty$.

2. Выбирается начальная точка $x^0\in X$.

3. Одним из методов безусловной оптимизации отыскивается решение задачи $min\ u(x,r_1)$.

4. Найденная точка x^1 служит исходной для решения новой задачи безусловной оптимизации min $u(x,r_2)$.

5. Процесс поиска продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие $|u(x,r_k)-u(x,r_{k-1})|<\varepsilon$, где ε заранее заданный уровень точности отыскания оптимума. В этом случае полагаем $x^k \cong x^*$, а $f(x^*) \cong u(x^k,r_k)$.

Ввиду того, что в силу построения вычислительной процедуры все точки последовательности $\{x^k\}$ принадлежат множеству X, также как и точка x^*, метод барьерных функций называется иногда методом внутренней точки.

4.8. Методы второго порядка

Методы второго порядка довольно редко применяются для решения задач нелинейного программирования в исследовательской и инженерной практике, поскольку трудно гарантировать, что целевые функции, полученные в ходе натурных экспериментов, будут иметь производные второго порядка в каждой точке области определения. Однако, такие алгоритмы существуют, и представляется целесообразным рассмотреть хотя бы один из них.

Поставим задачу отыскания минимума дважды непрерывно дифференцируемой функции: *min f(x); x*ϵ R^n. Начнем процедуру поиска из произвольно выбранной точки x^0. Разложим минимизируемую функцию в окрестности этой точки в ряд Тейлора, ограничившись членами до второго порядка включительно

$$f(x)=f(x^0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i^0}(x_i-x_i^0)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^0\partial x_j^0}(x_i-x_i^0)\cdot(x_j-x_j^0)+$$

$+o(|x-x^0|^2)$, или в векторной форме записи

$$f(x)=f(x^0)+\left\langle grad\, f(x^0),x-x^0\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle H(x^0)\cdot(x-x^0),x-x^0\right\rangle+$$

$+(|x-x^0|^2)$, где H – матрица Гессе, элементы которой представляют собой частные производные второго порядка целевой функции f по всем входящим в ее состав переменным. Отбросив остаточный член разложения, как величину более высокого порядка малости по отношению остальным слагаемым, решим задачу минимизации функции

$$\psi(x)=f(x^0)+\left\langle grad\, f(x^0),x-x^0\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle H(x^0)\cdot(x-x^0),x-x^0\right\rangle.$$

Применяя известное положение математического анализа о необходимом признаке экстремума функции многих переменных, получим $\psi'(x)=grad\, f(x^0)+H(x^0)\cdot(x-x^0)=0$. Умножая на H^{-1}, и выражая x, легко установить, что координаты точки минимума функции $\psi(x)$ будут $x_{min}=x^0-H^{-1}(x^0)\cdot grad\, f(x^0)$. Используя этот результат как рекуррентное соотношение, получим основную формулу алгоритма метода Ньютона $x^k=x^{k-1}-H^{-1}(x^{k-1})\cdot grad\, f(x^{k-1})$.

Существенным препятствием при реализации метода Ньютона может оказаться плохая обусловленность матрицы Гессе. Это сильно осложняет нахождение матрицы H^{-1} и требует применения специальных вычислительных приемов. Ещё одним важным обстоятельством является условие существования минимума функции $\psi(x)$, то есть положительная определенность матрицы Гессе. Если на каком то итерационном шаге это требование оказывается невыполненным, вектор $\rho^k = -H^{-1}(x^{k-1}) \cdot grad\, f(x^{k-1})$ не будет представлять направление спуска. В этом случае приходиться строить вспомогательную матрицу $H^{k-1} = \eta_k E_n + H(x^{k-1})$, где E_n – единичная матрица размерности n×n, а $\eta_k > 0$ подбираются таким образом, чтобы обеспечивалась положительная определенность матрицы H^{k-1}. Решение задачи считается найденным и построение релаксационной последовательности $\{x^k\}$ завершается, когда выполнено неравенство $|grad\ f(x^k)| < \varepsilon$, где ε – любое сколь угодно малое наперед заданное положительное число.

Все прочие методы второго порядка являются только модификациями метода Ньютона и касаются рекомендаций по выбору длины шага в направлении спуска и различных приемов получения матрицы H^{k-1}.

Пример 22. Найти минимум функции $f = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 5$ методом Ньютона. Поиск начать из точки $x^0 = (6;4)$. Вычислим вектор градиента целевой функции $grad\, f = (6x_1 + 2x_2 - 2;\ 2x_1 + 12x_2 + 4)$ и определим его значение в начальной точке поиска $grad\ f(x^0) = (42;\ 64)$. Найдем все вторые частные производные целевой функции $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6;$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 12;$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 2$. Отсюда матрица Гессе $H = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$. Её положительная определенность очевидна и проверки не требует. Применяя известные положения линейной алгебры, найдем обратную для неё матрицу $H^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1765 & -0{,}0294 \\ -0{,}0294 & 0{,}0882 \end{pmatrix}$. Используя формулу Ньютона, определим координаты точки $x^1 = x^0 - H^{-1}(x^0) \cdot grad\ f(x^0)$. Выполнив указанные действия, получим x^1 = (0,47; -0,41). Вычисляя вектор градиента в этой точке $grad\, f(x^1)$ = (0; 0,02), убеждаемся, что точка x^1 фактически есть точка минимума, так как $|grad\, f(x^1)| \cong 0$. Оценим эффективность метода Ньютона, решив эту же задачу с той же степенью точности методом наискорейшего спуска. Поскольку алгоритм метода наискорейшего спуска подробно продемонстрирован в примере 18, приведем здесь только координаты точек релаксационной последовательности $\{x^k\}$ и значения векторов градиента целевой функции в этих точках (рис. 4.8).

x^0 = (6; 4)	$grad\, f(x^0)$ = (42; 64)	α_0 = 0,083
x^1 = (2,514; -1,312)	$grad\, f(x^1)$ = (10,46; -6,716)	α_1 = 0,169
x^2 = (0,746; -0177)	$grad\, f(x^2)$ = (2,124; 3,369)	α_2 = 0,084
x^3 = (0,568; -0,46)	$grad\, f(x^3)$ = (0,488; -0,384)	α_3 = 0,170
x^4 = (0,485; -0,395)	$grad\, f(x^4)$ = (0,12; 0,23)	α_4 = 0,083
x^5 = (0,475; -0,414)	$grad\, f(x^5)$ = (0,022; -0,018)	

Рис. 4.8. Координаты точек и значения векторов градиента

Приведенные данные свидетельствуют, что для получения сравнимых по точности результатов оказалось необходимым совершить пять шагов методом наискорейшего спуска, тогда как в методе Ньютона хватило одного. Это указывает на высокую степень эффективности применения методов второго порядка, когда условия позволяют это сделать.

4.9. База вопросов для тестового контроля

Комментарий. Сложность теста *T* (трудоемкость в минутах / работы) оценивается экспертом, т.е. устанавливается за сколько минут непрерывной работы эксперт способен ответить на все вопросы теста. В целом, методика оценки следующая:

1. Оценивается трудоемкость ответа эксперта на один вопрос из теста, например, ему требуется 1 (мин/раб).

2. Тест, например, содержит 5 вопросов одинаковой сложности, случайным образом отобранных из базы вопросов, тогда $S(T) = 5$.

3. «Среднестатистическому» студенту для ответа, в целом, на тест требуется в 3 раза больше (мин/раб). Исходя из этого, на тест необходимо отпустить 15 (мин/раб).

Тест 4. Вопросы для оценки качества полноты (POL) усвоенных знаний (модуль 4)

1. Укажите функции выпуклые на всей числовой прямой.

*a) $y = x^2 - 4$;

*b) $y = \mathrm{e}^x$;

c) $y = \lg x$;

d) $y = 8 - x^2$.

2. Указать на каком интервале функция $y = \dfrac{1}{x}$ будет вогнутой.

*a) $(-\infty;\quad 0)$;

b) $(0;\quad +\infty)$;

c) на всей числовой прямой.

3. Как изменяется параметр α в условии выпуклости функции $f\left(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2\right) \le \alpha f\left(x^1\right) + (1-\alpha) f\left(x^2\right)$?

a) от 0 до ∞;

*b) от 0 до 1;

c) от –1 до 1.

4. Как правильно записывается условие того, что в точке x^* достигается минимум выпуклой непрерывно дифференцируемой функции на выпуклом множестве X.

*a) $\left(\mathrm{grad} f\left(x^*\right),\quad \left(x - x^*\right)\right) \ge 0$ для $\forall x \in X$;

b) $f(x) \cdot \left(x - x^*\right) \ge 0$ для $\forall x \in X$;

c) $\left(\mathrm{grad} f\left(x^*\right),\quad x^*\right) = 0$.

5. Как называется теорема о существовании решения задачи выпуклого программирования?

*a) Теорем Куна-Таккера;

b) Теорема Хана-Банаха;

c) Теорема фон Неймана.

6. Какие из перечисленных утверждений верны:

* a) матрица Гессе симметрическая;

b) матрица Гессе диагональная;

c) определитель матрицы Гессе не может быть равен нулю.

7. Какая точка в методе Хука–Дживса называется временной вершиной?

*a) точка, в которой достигается наилучшее значение функции отклика после пробных шагов по всем факторным переменным из некоторой базовой точки;

b) любая точка, в которой в процессе поиска определяется значение функции отклика;

c) точка, в которой достигается наибольшее изменение функции отклика по сравнению с предшествующей.

8. Требуется ли вычисление градиента функции отклика для реализации оптимизационной процедуры метода Хука–Дживса.

a) требуется в базовых точках;

b) требуется во временных вершинах;

*c) нет.

9. Применение, каких из перечисленных методов предполагает дифференцируемость функции?

*a) метод релаксации;

*b) метод наискорейшего подъема;

c) симплекс-метод;

d) метод слепого поиска.

10. Какой из перечисленных методов наиболее эффективен для отыскания глобального экстремума произвольной неунимодальной функции отклика?

a) метод релаксации;

b) метод наискорейшего подъема;

c) симплекс-метод;

*d) метод сканирования.

11. Выберите верные из перечисленных утверждений .

*a) вектор градиента функции $f(x)$ в точке x_0 ортогонален касательной к линии уровня в этой точке;

*b) размерность вектора градиента совпадает с размерностью пространства факторных переменных;

c) вектор градиента всегда неотрицателен.

12. Какое число вершин имеет правильный симплекс в пространстве, размерность которого равна 17?

a)16;

b)17;

*c)18.

13. Чему становится равна барьерная функция $I(x)$ при попадании на границу множества допустимых значений.

a) $I(x) = 0$;

*b) $I(x) = \infty$;

c) $I(x) > 0$.

14. Чему равна величина штрафа $\Phi(x)$ в методе штрафных функций, если точка x принадлежит множеству допустимых значений.?

*a) $\Phi(x) = 0$;

b) $\Phi(x)>0$;

c) $\Phi(x)<0$.

15. Как осуществляется приближение к точке условного оптимума функции отклика при реализации метода штрафных функций?

a) изнутри области допустимых значений;

b) порядок движения значения не имеет;

*c) извне области допустимых значений.

16. Задачей выпуклого программирования называется:

a) задача отыскания экстремума выпуклой (вогнутой) функции на произвольном множестве;

b) задача отыскания экстремума произвольной функции на выпуклом множестве;

*c) задача отыскания экстремума выпуклой (вогнутой) функции на выпуклом множестве.

17. Выберите верное определение выпуклости функции *f*.

*a) $f(\alpha x^1+(1-\alpha)\, x^2) \le \alpha f(x^1) + (1-\alpha)\, f(x^2)$ *для* $\forall\, x^1$ *и* x^2 *и* $\forall\, 0 \le \alpha \le 1$;

b) $f(\alpha x^1+(1-\alpha)\, x^2) \le \alpha f(x^1) + (1-\alpha)\, f(x^2)$ *для* $\forall\, x^1$ *и* x^2 *и* $\forall\, \alpha$;

c) $f(\alpha x^1+(1-\alpha)\, x^2) \ge \alpha f(x^1) + (1-\alpha)\, f(x^2)$ *для* $\forall\, x^1$ *и* x^2 *и* $\forall\, 0 \le \alpha \le 1$.

18. Как правильно записывается функция Лагранжа для задач нелинейного программирования виды $\min f(x)$ при ограничениях $\varphi_i(x) \le 0$ $i = 1, n$?

a) $\phi(x, \lambda) = f(x) * \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)$;

*b) $\phi(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)$;

c) $\phi(x, \lambda) = \lambda f(x) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)$.

19. Выберите верное утверждение

*a) если точка x^* является решением задачи нелинейного программирования, то точка (x^*, λ^*) есть седловая точка функции Лагранжа этой задачи;

*b) если точка (x^*, λ^*) является седловой точкой некоторой функции Лагранжа задачи нелинейного программирования, то точка x^* есть решение этой задачи;

c) если (x^*, λ^*) есть седловая точка функции Лагранжа задачи нелинейного программирования, то точка x^* является внутренней точкой множества допустимых планов этой задачи.

20. Если в задаче нелинейного программирования *f(x)* не является выпуклой (вогнутой), то седловая точка функции Лагранжа этой задачи:

a) существует всегда;

b) не существует;

*c) ничего определенного сказать нельзя.

Тест 4. Вопросы для оценки качества целостности (CHL) усвоенных знаний (раздел 4)

1. Как геометрически может быть интерпретирована строгая выпуклость функции одной переменной?

a) тангенс угла наклона касательной в любой точке графика функции с положительным направлением оси абсцисс неотрицателен;

b) отрезок прямой, соединяющий две любые точки графика функции, лежит ниже него;

*c) отрезок прямой, соединяющий две любые точки графика функции, лежит выше него.

2. Укажите функции вогнутые на всей числовой прямой.

a) $y = 5\sin 3x$;

*b) $y = 7 + 2x - x^2$;

c) $y = x^3$.

3. Укажите функции, обладающие как интервалами выпуклости, так и интервалами вогнутости.

a) $y = \ln x$;

*b) $y = \sin 2x$;

*c) $y = x^3$;

d) $y = 4x^2 + 2x + 1$.

4. Если в некоторой точке x_0 главные миноры матрицы Гессе, расположенные в порядке возрастания, равны: $\Delta_1 = -4, \quad \Delta_2 = 8, \quad \Delta_3 = -1, \quad \Delta_4 = 14$, то:

*a) точка x_0 является точкой максимума;

b)точка x_0 является точкой минимума;

c) точка x_0 не является точкой экстремума.

5. Если в некоторой точке x_0 у матрицы Гессе восьмого порядка четыре главных минора положительны, а четыре отрицательны, то:

*a) ничего определенного о характере точки x_0 сказать нельзя;

b) точка x_0 является точкой максимума;

c) точка x_0 является точкой минимума.

6. Какие действия предпринимаются в методе Хука–Дживса, если после очередного шага из некоторой базовой точки происходит распад конфигурации?

a) из последней базовой точки выполняют шаг в противоположном направлении;

b) процедуру поиска считают завершенной;

*c) в окрестности последней базовой точки выполняется серия пробных шагов для построения новой конфигурации.

7. Что является критерием окончания оптимизационной процедуры в методе Хука–Дживса?

*a) длина пробного шага становится меньше заранее выбранной величины и не приводит к улучшению функции отклика;

b) скалярное произведение градиентов в двух последовательных базовых точках равно нулю;

c) модуль вектора градиента функции отклика становится меньше наперед заданного положительного числа.

8. Найти вектор градиента функции: $x_1^2 + 5x_1x_2 - 4x_2^2 + 3x_1 + x_2 + 7$.

a) ($2x_1+5x_2+7$, $5x_1-8x_2+7$);

b) ($2x_1+5x_2+7$, $5x_1-8x_2+7$);

c) ($2x_1+8x_2+3$, $-5x1-8x_2+1$);

*d) ($2x_1+5x_2+3$, $5x_1-8x_2+1$).

9. Какое условие должно быть выполнено при выборе длины шага для того, чтобы приращение функции отклика при движении в направлении градиента было наибольшим?

a) $f(x^{k+1})-\alpha^k f(x^k)=0$;

*b) $(gradf(x^{k+1}), gradf(x^k))=0$;

c) $f(x^{k+1})-\alpha^k f(x^k)=0$;

d) $(x^{k+1}, x^k)=0$.

10. Градиент функции $f(x)$ в точке x^k представляет собой вектор с координатами (2,–3). Каким должен быть вектор градиента этой

функции в точке x^{k+1} при решении задачи максимизации методом наискорейшего подъема?

* a) (6,4);

b) (–3,2);

c) (5,0).

11. Чему равен вектор градиента функции $y = x_1^3 x_2 + 2x_2^2 x_3 + x_1 x_3 - 5x_1$ в точке с координатами (1; -1; 2)?

a) (6; 7; 4)

*b) (-6; -7; 4)

c) (-1; 2; 1)

d) (-6; 2; 1)

12. Как при решении задачи методом штрафных функций $F(x,r_k)$ формируется последовательность коэффициентов штрафа $\{r_k\}$?

*a) как возрастающая последовательность;

b) как убывающая последовательность;

c) как убывающая последовательность, члены которой образуют сходящийся числовой ряд.

13. Если множество допустимых значений факторной переменной в задаче условной оптимизации формируется системой ограничений вида: $\varphi_i(x) < 0 \quad i = \overline{1,m}$, то какие из перечисленных функций могут быть использованы для построения процедуры метода барьерных функций?

a) $I(x) = -\sum\limits_{i=1}^{m} \sqrt{\varphi_i(x)}$;

*b) $I(x) = -\sum\limits_{i=1}^{m} (\varphi_i(x))^{-1}$;

c) $I(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \left[max\{0, \varphi_i(x)\}\right]^2$;

*d) $I(x) = -\sum\limits_{i=1}^{m} ln(-\varphi_i(x))$.

14. Две точки с координатами (-2; 0) и (2; 0) являются вершинами правильного симплекса в двумерном пространстве. Какие из ниже перечисленных точек могут быть третьей вершиной этого симплекса?

a) (0; 4);

*b) $(0; 2\sqrt{3})$;

c) (0; -4);

*d) $(0; -2\sqrt{3})$

e) ни одна из точек вершиной этого симплекса быть не может.

15. Две точки с координатами (0; 2) и (2; 0) являются вершинами правильного симплекса в двумерном пространстве. Какие из ниже перечисленных точек могут быть третьей вершиной этого симплекса?

a) (0; 0);

b) (2; 2);

c) $(2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$;

d) $(-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$

*e) ни одна из точек вершиной этого симплекса быть не может.

16. Какие из приведенных векторов ортогональны друг к другу: α = (4, 3, 2); β = (2, -3, 1); γ = (-2, 2, 1)?

a) векторы α и β;

*b) векторы α и γ;

c) векторы β и γ.

17. Какие из приведенных векторов ортогональны друг к другу: α = (1, 4, 6); β = (3, -1, 1); γ = (-2, 3, 1)?

a) векторы α и β;

b) векторы α и γ;

*c) никакие два вектора друг к другу не ортогональны.

18. Какими из перечисленных векторов может быть задано направление поиска оптимума функции трех переменных в методе случайных направлений: α = (0,35; -0,67; 0,65); β = (0,1; 0,65; -0,25); γ = (1; 2; 4)?

*a) вектором α;

b) вектором β;

c) ни один из перечисленных векторов для реализации метода случайных направлений использоваться не может.

19. Две компоненты вектора, определяющего направление поиска оптимума функции трех переменных в методе случайных направлений равен соответственно 0,2 и -0,7. Какой должна быть третья компонента вектора?

a) 0,1;

b) -0,1;

*c) 0,68.

20. Какими из перечисленных векторов может быть задано направление поиска оптимума функции трех переменных в методе случайных направлений: α = (0,25; 0,4; -0,35); β = (0,3; 0,15; 0,55); γ = (0,63; 0,17; -0,55)?

a) векторами α и β;

b) только вектором β;

*c) ни один из перечисленных векторов для реализации метода случайных направлений использоваться не может.

4.10. База учебных проблем и задач

Комментарий. Сложность (трудоемкость в минутах / работы) задачи X оценивается экспертом, т.е. за сколько минут непрерывной работы эксперт способен решить эту задачу. Например, эксперт способен решить задачу X за 15 (мин/раб). Будем считать, что сложность задачи X равной $S(X)$ = 15. Как следует из статистических данных, «среднему» студенту для решения задачи X требуется в 5 раз больше мин/раб, поэтому ему отпускается 75 (мин/раб).

Блок задач 1

№ 1. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$$\min W = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 5; \quad x^0 = (6,4)$$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)$=15.

№ 2. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$$\min W = 2x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_1 - 2x_2 - 4; \quad x^0 = (9,3)$$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)$=15.

№ 3. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$$\max W = -2x_1^2 + 3x_1x_2 - 6x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 1; \quad x^0 = (4,8)$$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)$=15.

№ 4. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$$\max W = -6x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 - 2; \quad x^0 = (5,6)$$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)$=15.

№ 5. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$$\max W = -3x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 5x_1 - 4x_2; \quad x^0 = (8,8)$$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)$=15.

№ 6. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$$\min W = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 5x_2 + 1; \quad x^0 = (10,10)$$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)=15$.

№ 7. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$$\min W = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2; \quad x^0 = (6,7)$$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)=15$.

№ 8. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$$\max W = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2 + 6x_1 + 4x_2; \quad x^0 = (8,6)$$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)=15$.

№ 9. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$$\min W = 5x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1 - 7x_2 + 2; \quad x^0 = (5,8)$$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)$=15.

№ 10. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$$\max W = -x_1^2 + 3x_1x_2 - 8x_2^2 + 5x_1 + 6x_2 - 3; \quad x^0 = (-3,9)$$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)$=15.

№ 11. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$$\max W = -4x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 - 5; \quad x^0 = (10,-4)$$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)$=15.

№ 12. Выполнить движение к оптимуму методом Хука – Дживса, взяв в качестве первой базовой точки b_1 точку x^0. Длину пробного шага принять равной 1 по обеим координатам. Решение завершить нахождением пятой базовой точки b_5 или в точке распада конфигурации, признаком чего является отсутствие улучшения значения целевой функции в новой базовой точке. В ответе указать координаты всех полученных базовых точек и значение функции W в этих точках.

$\min W = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_2^2 + 10x_1 - 15x_2 + 1; \quad x^0 = (8{,}10)$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(1)$=15.

Блок задач 2

№ 1. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\min W = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 5; \quad x^0 = (6{,}4)$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(2)$=20.

№ 2. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\min W = 2x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_1 - 2x_2 - 4; \quad x^0 = (9{,}3)$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(2)$=20.

№ 3. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\max W = -2x_1^2 + 3x_1x_2 - 6x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 1; \quad x^0 = (4{,}8)$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(2)$=20.

№ 4. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\max W = -6x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 - 2; \quad x^0 = (5,6)$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(2)$=20.

№ 5. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\max W = -3x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 5x_1 - 4x_2; \quad x^0 = (8,8)$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(2)$=20.

№ 6. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\min W = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 5x_2 + 1; \quad x^0 = (10,10)$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(2)$=20.

№ 7. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\min W = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2; \quad x^0 = (6,7)$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(2)$=20.

№ 8. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\max W = -3x_1^{\ 2} + 4x_1x_2 - 4x_2^{\ 2} + 6x_1 + 4x_2; \quad x^0 = (8,6)$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=20.

№ 9. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\min W = 5x_1^{\ 2} + x_1x_2 + 2x_2^{\ 2} + 4x_1 - 7x_2 + 2; \quad x^0 = (5,8)$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=20.

№ 10. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\max W = -x_1^{\ 2} + 3x_1x_2 - 8x_2^{\ 2} + 5x_1 + 6x_2 - 3; \quad x^0 = (-3,9)$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=20.

№ 11. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\max W = -4x_1^{\ 2} - x_1x_2 - 2x_2^{\ 2} + 4x_1 + 8x_2 - 5; \quad x^0 = (10,-4)$

Время, достаточное для решения экспертом, S(2)=20.

№ 12. Сделать два шага методом наименьшего подъема (спуска) из точки x^0. В ответе указать: координаты точек x^1 и x^2; значения функций $W(x^1)$ и $W(x^2)$; длины шагов α_1 и α_2.

$\min W = 2x_1^{\ 2} - 6x_1x_2 + 8x_2^{\ 2} + 10x_1 - 15x_2 + 1; \qquad x^0 = (8,10)$

Время, достаточное для решения экспертом, $S(2)$=20.

База задач на использование разных методов

Решить задачи нелинейного программирования 1 - 6 аналитически, использовав свойства седловой точки функции Лагранжа.

1. Найти $W = min\ [(x + 1)^2 + (y - 3)^2]$ при ограничении $x + y \leq 0$. Время, достаточное для решения экспертом, 10 минут.

№ 2. Найти $W = max\ (x^2 + y^2 + z^2)$ при ограничении $x + 3y + 2z \leq 7$. Время, достаточное для решения экспертом, 10 минут.

№ 3. Найти $W = max\ (xy)$ при ограничениях $x^2 + y^2 \leq 1$; $(x -1)^2 + y^2 \leq 1$. Время, достаточное для решения экспертом, 15 минут.

№ 4. Найти $W = max\ (xyz)$ при ограничениях $xy + xz + yz \leq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$. Время, достаточное для решения экспертом, 15 минут.

№ 5. Найти $W = max\ (xy + xz)$ при ограничениях $4x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 48$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$. Время, достаточное для решения экспертом, 15 минут.

№ 6. Найти $W = max\ (z + x^2 + y^2)$ при ограничениях $2x + y - z \leq 2$; $x + 2y + z \leq 4$. Время, достаточное для решения экспертом, 20 минут.

№ 7. Найти наибольшее расстояние от начала координат до точек линии пересечения параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ с плоскостью $x + 2y - z = 0$.

Время, достаточное для решения экспертом, 20 минут.

№ 8. Известно, что стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его веса. Показать, что при делении камня, общая стоимость частей будет меньше стоимости целого бриллианта, и установить, какой вариант деления особенно не выгоден.

Время, достаточное для решения экспертом, 15 минут.

№ 9. Расход топлива океанского круизного лайнера пропорционален кубу его скорости. Цена топлива равна 18000 ден. ед. за тонну. При скорости 15 миль в час часовой расход топлива составляет 1,5 тонны. Прочие затраты по круизу от скорости движения судна не зависят и равны 16000 ден. ед. в час. Определить при какой скорости лайнера затраты на совершения круиза протяженностью не менее 1000 миль будут минимальны, если стоянки в портах не предусмотрены.

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 30 минут.

№ 10. Дневная выручка Y небольшого автотранспортного предприятия зависит от числа автомашин A и количества сотрудников N и определяется соотношением: $Y = 900 \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt[4]{N}$. Содержание одного автомобиля обходится в 400 ден. ед., а средняя зарплата одного сотрудника составляет 100 ден. ед. Сколько автомашин должен иметь парк предприятия и каков должен быть штат сотрудников для достижения максимальной дневной выручки, если величина издержек не может превышать 2000 ден. ед.

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 30 минут.

№ 11. Методом Зейделя найти $f = min\ (5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2)$ с точностью ε = 0,1, начав движение из точки с координатами (5;2).

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 25 минут.

№ 12. Методом Зейделя найти $f = max\ (-2x_1^2 + 3x_1x_2 - 6x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 1)$ с точностью $\varepsilon = 0{,}1$, начав движение из точки с координатами (4;8)

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 30 минут.

№ 13. Симплекс-методом найти $f = min\ (2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 14x_1 - 12x_2 + 29)$ с точностью $\varepsilon = 0{,}1$. В качестве вершин исходного симплекса взять точки с координатами: (6;3); (8;3); (7;3-√3).

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 50 минут.

№ 14. Методом Хука-Дживса найти $f = min\ (3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 7x_1 - 4x_2 - 2)$. В качестве первой базовой точки взять точку с координатами (8;10). Начальную длину пробных шагов по обеим координатам принять равной 1. Вычисления завершить получением координат восьмой базовой точки.

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 50 минут.

№ 15. Методом Хука-Дживса найти $f = min\ (x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 3)$. В качестве первой базовой точки взять точку с координатами (3;-2). Начальную длину пробных шагов по обеим координатам принять равной 1. Вычисления завершить получением координат пятнадцатой базовой точки.

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 90 минут.

№ 16. Методом Хука-Дживса минимизировать функцию Розенброка $f = 10(x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2$. В качестве первой базовой точки взять точку с координатами (-1;1). Начальную длину пробных шагов подобрать самостоятельно. Вычисления завершить получением координат двадцатой базовой точки.

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 120 минут.

№ 17. Методом наискорейшего спуска найти $f = min\ (9x_1^2 + 16x_2^2 - 90x_1 - 128x_2)$, начав движение из начала координат.

Время, достаточное для решения задачи, 15 минут.

№ 18. Методом наискорейшего подъёма найти $f = max\ (-3x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 5x_1 - 4x_2)$ с точностью $\varepsilon = 0{,}1$, начав движение из точки с координатами (8;8).

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 40 минут.

№ 19. Методом наискорейшего спуска найти $f = min\ (11x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_1 + 18x_2 - 22)$ с точностью $\varepsilon = 0{,}1$, начав движение из точки с координатами (4;0).

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 50 минут.

№ 20. Методом проекции градиента найти $f = max\ (x_1 + 2x_2 - 0{,}2x_1^2 - 0{,}2x_2^2)$ при ограничениях: $x_1^2 + x_2^2 \le 4$; $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$. В качестве начальной точки взять точку безусловного максимума целевой функции.

Время, достаточное для решения задачи, 25 минут.

№ 21. Методом проекции градиента найти $f = max\ (x_1 + 2x_2 - 0{,}2x_1^2 - 0{,}2x_2^2)$ при ограничениях: $\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9} \le 1$; $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$. В качестве начальной точки взять точку безусловного максимума целевой функции.

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 30 минут.

№ 22. Методом проекции градиента найти $f = min\ (x_1^2 + x_2^2 - 16x_1 - 10x_2 + 89)$ при ограничениях: $2x_1^2 - 12x_1 + 9x_2 - 27 \le 0$; $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$. В качестве начальной точки взять точку с координатами (10;4).

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 40 минут.

№ 23. Методом штрафных функций найти $f = max\ (x_1 + x_1x_2 + 2x_2)$ при ограничении $x_1 + x_2 \leq 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}2$, начав движение из точки с координатами (2;0).

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 40 минут.

№ 24. Методом штрафных функций найти $f = min\ (4x_1^2 - 5x_1x_2 + x_2^2)$ при ограничениях: $x_1 + x_2 - 6 \leq 0$; $x_1 - x_2 + 2 \leq 0$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}2$, начав движение из точки с координатами (0;0)

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 60 минут.

№ 25. Методом штрафных функций найти $f = min\ (x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 5)$ при ограничениях: $x_1 + x_2 \leq 0$; $x_1 \geq 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}2$, начав движение из точки с координатами (2,2).

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 80 минут.

№ 26. Методом Ньютона найти $f = min\ (2x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_1 - 2x_2 - 4)$. В качестве начальной точки взять точку с координатами (9;3).

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 30 минут.

№ 27. Методом Ньютона найти $f = max\ (-6x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 - 2)$. В качестве начальной точки взять точку с координатами (5;6).

Время, достаточное для решения задачи экспертом, 30 минут.

Раздел 5. Динамическое программирование

Динамическими называются процессы, которые зависят от времени (переменные которых являются функциями времени), поэтому если понимать это определение в буквальном смысле, то абсолютно все происходящие в мире процессы следует считать динамическими, поскольку трудно представить себе нечто существующее вне времени. Однако в ряде практических задач при построении математических моделей влияние фактора времени столь незначительно, что им можно пренебречь без ущерба для содержательного смысла модели. В дальнейшем изложении мы будем называть динамическими только те процессы и связанные с ними задачи, где игнорирование временного фактора недопустимо. К таким задачам относятся задачи календарного планирования, задачи поэтапного финансирования долгосрочных проектов, задачи распределения нагрузки на каскаде химических реакторов, задачи выбора маршрута между двумя пунктами на разветвленной сети дорог и т.п. Рассмотрим конкретные примеры постановок таких задач.

1. Требуется составить план работы 100 предприятий П(1), П(2), … , П(100) на 5 лет и на это выделено 1миллиард рублей. Каждое предприятие за год приносит прибыль, зависящий от того сколько в него вложено. В начале каждого года, имеющиеся средства перераспределяются между предприятиями. Задача: какое количество средств нужно вложить в каждое предприятие, чтобы суммарная прибыль за 5 лет была бы максимальной.

2. Трактор эксплуатируется в течение 6 лет. В начале каждого года необходимо принять одно из трех решений:

1) продать трактор и купить новый;

2) сделать ремонт и работать дальше;

3) продолжить работу без ремонта.

Необходимо построить план, чтобы суммарные расходы на приобретение, ремонт, эксплуатацию были бы минимальны.

3. Прокладывается участок скоростной железной дороги, например, между Москвой и Казанью. Местность пересеченная и включает холмы, овраги, болота, реки, а также населенные пункты, предприятия и т.д. Требуется построить план, чтобы суммарные расходы были бы минимальны.

Обобщая приведенные примеры, и, выделяя их общую особенность, нельзя не заметить, что в каждом из них процедура формирования и принятия управленческих решений не может быть реализована иначе, чем поэтапно. Задачи математического программирования, целевые функции и ограничения которых зависят от времени, образуют класс задач динамического программирования.

Переменные, входящие в состав целевых функций задач динамического программирования, принято разделять на две группы. Первую группу образуют фазовые переменные, набор которых полностью характеризует состояние динамического процесса в произвольный момент времени. Эту группу переменных будем обозначать буквами **x**. Вторая группа формируется из управляющих переменных или стратегий. Предполагается, что существуют аппаратурные средства, посредством которых можно влиять на эти переменные, добиваясь изменений фазовых переменных в желаемом направлении. Эту группу переменных будем обозначать буквами **u**.

Зависимость фазовых и управляющих переменных от времени предполагает обязательно наличие двух, в общем, очевидных обстоятельств. 1. Процесс протекает не мгновенно, а имеет некоторую протяженность во времени; 2. В каждый момент времени последующее течение процесса определяется выбором стратегий, или управлением, которое также является функцией времени. Таким образом, в самой общей постановке задача динамического программирования может быть сформулирована, как $max(min)W(x,u)$ при $x \in X; u \in U; x = x(t); u = u(t).$ Универсального метода решения подобных задач не существует. В ряде случаев, когда размерность векторов **x** и **u** велика, а вид множеств **X** и **U** сложен, трудно даже наметить пути к решению. Поэтому введем некоторые дополнительные упрощающие предложения, относительно вида целевой функции и ограничений, которые имеют важные практические основания. Эти вводимые ограничения, вообще говоря, вполне естественны и отнюдь не являются чем-то надуманным, поскольку можно без труда указать целый ряд задач, которые полностью удовлетворяют их требованиям. 1. Будем считать целевую функцию $f(x)$ аддитивной, т.е. представимой в виде алгебраической суммы функций, каждая из которых зависит только от одной фазовой переменной, или мультипликативной, т.е. представимой в виде произведения функций, каждая из которых зависит тоже только от одной фазовой переменной. Иначе говоря $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$, или $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots. x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$. Большинство целевых функций экономических задач подобным свойством обладают. Например, доход любого субъекта экономики за некоторый период времени всегда может быть представлен как алгебраическая сумма доходов за более мелкие отрезки времени. Годовой доход есть сумма доходов по кварталам, по месяцам и т. д. Практически важным следствием этого свойства является возможность сведения задачи оптимизации функции n переменных к последовательности n задач одномерной оптимизации. В принципе такой подход допустим и для функций не обладающих свойством аддитивности (мультипликативности), однако технические сложности, которые при этом возникают, делают его малоперспективным. 2. Будем предполагать, что ограничения на фазовые переменные могут быть заданы в явном виде аддитивными функциями, т.е. множество допустимых планов X может быть записано как $X = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x_i) \le b_j, \left(j = \overline{1,m} \right) \right\}$. 3. Динамический процесс может быть дискретизирован, т.е. фазовые и управляющие переменные, как функции времени, $x(t)$ и $u(t)$ могут быть представлены в виде последовательностей $x^1, x^2, \ldots x^p$ и $u^0, u^1, \ldots u^{p-1}$, каждый элемент которых соответствует какому то фиксированному моменту времени $t_0, t_1, \ldots t_p$. Кроме того будем полагать, что в любой момент времени t_k значение вектора фазовых переменных $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots x_n^k)$ полностью определяется значением его в предшествующий момент времени t_{k-1} и выбором управления: $x^k = \varphi_{k-1}(x^{k-1}, u^{k-1})$ для любого $\left(k = \overline{1, p}\right)$. Отсюда следует, что выбор управлений $u^0, u^1 \ldots u^{p-1}$ однозначно задает траекторию процесса, т.е. последовательность значений фазовых переменных $x^0, x^1 \ldots x^p$ в моменты времени $t_0, t_1, \ldots t_p$. Не зависит от выбора управления только точка x^0, которая соответствует моменту времени t_0 и является начальной точкой всех возможных траекторий. С учетом сделанных замечаний задача динамического программирования может быть сформулирована в виде: отыскать последовательность управлений $\left\{u^{*k}\right\}\left(k = \overline{0, p-1}\right)$, которая вместе с определяемой им траекторией $\left\{x^{*k}\right\}\left(k = \overline{0, p}\right)$ обеспечит достижение экстремума аддитивной функции $W(x,u) = \sum_{k=0}^{p-1} f_k(x^k, u^k) + f_p(x^p)$. Переформулировать задачу для мультипликативной целевой функции не представляет никакой сложности, однако в дальнейшем, дабы не отвлекаться от существа дела на технические подробности, все дальнейшие построения будут проведены только для аддитивных функций.

Аддитивность целевой функции (см. предположение 1) и «шаговость» процесса приводит к идее создания пошагового алгоритма решения сформулированной оптимизационной задачи. Однако, поскольку в задаче требуется найти всю оптимальную траекторию $\left\{x^{*k}\right\}\left(k = \overline{0, p}\right)$, а не отдельную её точку, реализующую экстремум целевой функции, на каком то участке, то, очевидно, на каждом шаге при выборе управления необходимо учитывать все последующие шаги оптимизационной процедуры, что само по себе является задачей невероятной сложности. Но существует один особый шаг, где в подобной предусмотрительности нет необходимости. Это последний шаг, из предпоследней точки траектории x^{p-1} в последнюю x^p. На этом шаге управление u^{p-1} следует выбирать так, чтобы просто максимизировать (минимизировать) целевую функцию. Таким образом, смысл последнего шага очевиден: $max\, f(x^p)$. Трудность задуманного состоит в том, что выбор управления и получающийся результат зависят от того, в каком состоянии оказался процесс к последнему шагу в результате действий на предыдущих шагах. Поэтому, решая задачу максимизации целевой функции на последнем шаге при произвольном её состоянии к p-1 шагу, можно получить лишь некоторое <u>условно оптимальное</u> <u>управление</u> u^{p-1}, которое будет являться оптимальным при условии, что $x^{p-1} = x^{*p-1}$. Естественно, что найденное при этом значение целевой функции $f(x^p)$ также будет условно оптимальным. Далее, рассматривая предпоследний шаг для произвольного состояния, находим условно оптимальное управление u^{p-2}, которое с учетом уже определенных u^{p-1} и $f(x^p)$, в силу аддитивности целевой функции, максимизирует сумму $f(x^p) + f(x^{p-1})$. Продолжая процесс решения аналогичным образом, строим цепочку условно оптимальных управлений $u^{p-1}, u^{p-2}, \ldots u^0$ и условно оптимальных значений целевой функции. Но, как было замечено, имеется одна особая точка, положение которой не зависит от выбора управления. Это точка x^0, определяющая положение процесса в момент времени t_0 и являющаяся начальной точкой всех возможных траекторий, в том числе и оптимальной траектории $\left\{x^{*k}\right\} \left(k = \overline{0, p}\right)$. Следовательно $x^0 \equiv x^{*0}$. А значит $f(x^0) = f^*(x^0)$, т.е. оптимальное решение динамической задачи в начальной точке траектории получено. Подставляя точку x^{*0} в выражение для условно оптимального управления, получим значение оптимального управления $u^{*0} = u^0\left(x^{*0}\right)$ и, далее, используя условие шаговости процесса, находим $x^{*1} = \varphi_0(x^{*0}, u^{*0})$ и $u^{*1} = u^1(x^{*1})$. Таким образом строится полная последовательность оптимальных управлений $\left\{u^{*k}\right\} \left(k = \overline{0, p-1}\right)$, формирующая оптимальную траекторию $\left\{x^{*k}\right\}$, на которой достигается максимум аддитивной целевой функции $W(x,u)$, т.е. решается задача $W(x^*, u^*) = max W(x,u)$ в рамках сформулированных ограничивающих предположений.

Замечание. Какую из граничных точек считать «началом», а какую «концом» траектории и откуда начинать построение последовательности условно оптимальных управлений решается индивидуально в каждом конкретном случае. Определяющим при этом становится содержательный смысл задачи и удобство построения вычислительной процедуры.

Рассмотрим пример численного решения задачи динамического программирования, который может быть проиллюстрирован геометрически.

Пример (23). Водитель планирует поездку из пункта x_0 в пункт x_k. На пути следования имеется ряд перекрестков, откуда продолжать движение к месту назначения можно по одному из двух направлений: «северному» и «восточному». Время в пути между соседними перекрестками зависит от условий движения и предполагается известным. Необходимо выбрать оптимальную конфигурацию маршрута, минимизирующую общее время поездки.

Легко убедиться, что формулировка задачи полностью удовлетворяет всем замечаниям, которые были сделаны для задач динамического программирования. Действительно, целевая функция задачи имеет смысл времени, затраченному в пути, и является аддитивной, так как общее время движения равно сумме временных интервалов по всему пути следования от перекрестка к перекрестку. Дискретизация естественным образом входит в условие задачи, поскольку все возможные направления движения разделены на участки конечной протяженности. Наконец, «шаговость» процесса обеспечивается однозначностью положения каждой новой точки траектории (перекрестка) выбором управления («север» или «восток») в предшествующей точке траектории.

На рис. 5.1 показано положение всех перекрестков и время, необходимое для преодоления расстояния между ними. На этом же рисунке диагональными сечениями А-А, В-В и т.д. показаны этапы «шаги» динамического процесса в порядке их близости к конечному пункту. Так из любой точки сечения А-А – до конечного пункта следования остается один шаг, т.е. это точки $\{x_{k-1}\}$ одна из которых принадлежит оптимальной траектории. Из точки сечения В-В до точки x_k два этапа движения и т.д. В точки A_1 и A_2, откуда начинается последний этап движения, можно попасть из точек B_1, B_2 и B_3. Это позволяет указать четыре различных варианта пути:

- ✓ $B_1 - A_1 - x_k$ - протяженностью 19 часов;
- ✓ $B_2 - A_1 - x_k$ - протяженностью 17 часов;
- ✓ $B_2 - A_2 - x_k$ - протяженностью 16 часов;
- ✓ $B_3 - A_2 - x_k$ - протяженностью 15 часов.

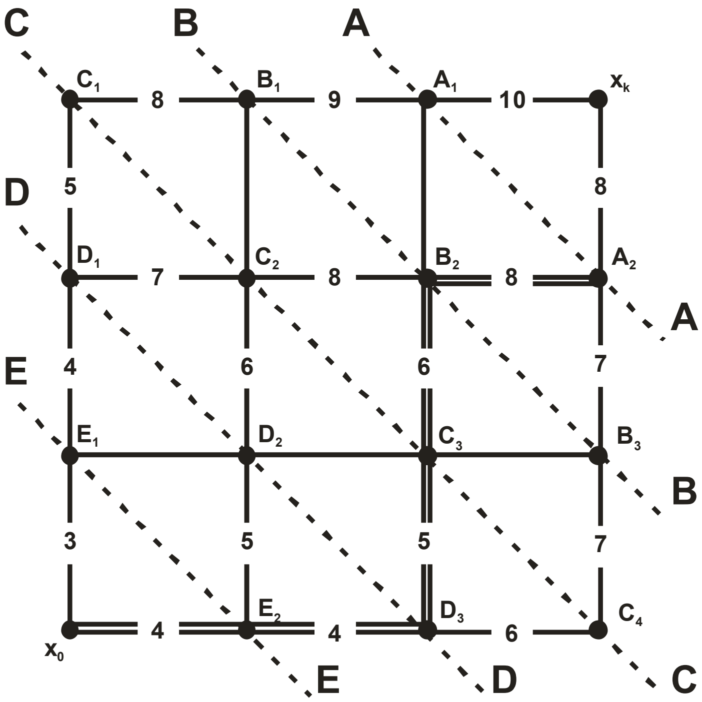


Рис. 5.1. Расположение всех перекрестков

Два из них $B_2 - A_1 - x_k$ и $B_2 - A_2 - x_k$ начинаются в одной и той же точке B_2, причем путь $B_2 - A_1 - x_k$ на 1 час продолжительнее. Это означает, что звено $B_2 - A_1$ в состав оптимального маршрута входить не может, а условно оптимальными участками траекторией, исходящих из сечения *B-B* будут пути

$$B_1 - A_1 - x_k \to \Phi(B_1) = \widetilde{\Phi}(x_{k-2}) = 19;$$

$$B_2 - A_2 - x_k \to \Phi(B_2) = \widetilde{\Phi}(x_{k-2}) = 16;$$

$$B_3 - A_2 - x_k \to \Phi(B_3) = \widetilde{\Phi}(x_{k-2}) = 15.$$

Следующая совокупность маршрутов порождается точками сечения *C-C*. С участком того, что участок пути $B_2 - A_1$ выведен из рассмотрения как бесперспективный, мы получим еще шесть вариантов движения:

- ✓ $C_1 - B_1 - A_1 - x_k$ - протяженностью 27 часов;
- ✓ $C_2 - B_1 - A_1 - x_k$ - протяженностью 25 часов;
- ✓ $C_2 - B_2 - A_2 - x_k$ - протяженностью 24 часа;
- ✓ $C_3 - B_2 - A_2 - x_k$ - протяженностью 22 часа;
- ✓ $C_3 - B_3 - A_2 - x_k$ - протяженностью 23 часа;

- ✓ $C_4 - B_3 - A_2 - x_k$ - протяженностью 22 часа.

Из точек C_2 и C_3 исходят по два маршрута и, руководствуясь теми же соображениями, что и при анализе сечения В-В, можно утверждать, что варианты путей $C_2 - B_1 - A_1 - x_k$ и $C_3 - B_3 - A_2 - x_k$ участками оптимальной траектории быть не могут. Это позволяет указать четыре участка условно оптимальных траекторий, исходящих из сечения *С-С* и для них значения (условно оптимальные) целевой функции:

$$C_1 - B_1 - A_1 - x_k \rightarrow \Phi(C_1) = \widetilde{\Phi}(x_{k-3}) = 27;$$

$$C_2 - B_2 - A_2 - x_k \rightarrow \Phi(C_2) = \widetilde{\Phi}(x_{k-3}) = 24;$$

$$C_3 - B_2 - A_2 - x_k \rightarrow \Phi(C_3) = \widetilde{\Phi}(x_{k-3}) = 22;$$

$$C_4 - B_3 - A_2 - x_k \rightarrow \Phi(C_4) = \widetilde{\Phi}(x_{k-3}) = 22.$$

Рассмотрим маршруты сечения *Д-Д*, получим

- ✓ $D_1 - C_1 - B_1 - A_1 - x_k$ - протяженностью 32 часа;
- ✓ $D_1 - C_2 - B_2 - A_2 - x_k$ - протяженностью 31 час;
- ✓ $D_2 - C_2 - B_2 - A_2 - x_k$ - протяженностью 30 часов;
- ✓ $D_2 - C_3 - B_2 - A_2 - x_k$ - протяженностью 29 часов;
- ✓ $D_3 - C_3 - B_2 - A_2 - x_k$ - протяженностью 27 часов;
- ✓ $D_3 - C_4 - B_3 - A_2 - x_k$ - протяженностью 28 часов.

И вновь применяя принцип наименьшей протяженности, оставляем в качестве условно оптимальных пути:

$$D_1 - C_2 - B_2 - A_2 - x_k \rightarrow \Phi(D_1) = \widetilde{\Phi}(x_{k-4}) = 31;$$

$$D_2 - C_3 - B_2 - A_2 - x_k \rightarrow \Phi(D_2) = \widetilde{\Phi}(x_{k-4}) = 29;$$

$$D_3 - C_3 - B_2 - A_2 - x_k \rightarrow \Phi(D_3) = \widetilde{\Phi}(x_{k-4}) = 27.$$

Исследуя возможные пути из сечения *Е-Е*, получим четыре варианта.

- ✓ $E_1 - D_1 - C_2 - B_2 - A_2 - x_k$ - протяженностью 35 часов;
- ✓ $E_1 - D_2 - C_3 - B_2 - A_2 - x_k$ - протяженностью 35 часов;

✓ $E_2 - D_2 - C_3 - B_2 - A_2 - x_k$ - протяженностью 34 часа;

✓ $E_2 - D_3 - C_3 - B_2 - A_2 - x_k$ - протяженностью 31 час.

Протяженностью маршрутов, исходящих из точки E_1 одинакова, поэтому сечение Е-Е так же дает три условно оптимальных пути

$$E_1 - D_1 - C_2 - B_2 - A_2 - x_k \to \Phi(E_1) = \tilde{\Phi}(x_{k-5}) = 35$$

$$E_1 - D_2 - C_3 - B_2 - A_2 - x_k \to \Phi(E_1) = \tilde{\Phi}(x_{k-5}) = 35$$

$$E_2 - D_3 - C_3 - B_2 - A_2 - x_k \to \Phi(E_2) = \tilde{\Phi}(x_{k-5}) = 31$$

Два оставшихся пути начинаются в исходной точке траектории x_0, которая принадлежит всем траекториям, в том числе и оптимальной, т.е. $x_0 \equiv x_0^*$. Добавляя к маршрутам, исходящим из точки E_1 протяженность пути $x_0 - E_1$, получим $\tilde{\Phi}(x_0) = 38$. К единственному условно оптимальному маршруту, исходящему из точки E_2 добавляем протяженность пути $x_0 - E_2$ и получим $\tilde{\Phi}(x_0) = 35$. Таким образом, $\Phi^*(x_0) = 35$. Следовательно, оптимальное управление при начале движения предполагает «восточное» направление из точки x_0 в точку E_2. Найденному значение $\Phi^*(x_0)$ имеет смысл минимально возможного времени пребывания в пути от пункта x_0 до пункта x_k. Двигаясь по маршруту $x_0 - E_2 - D_3 - C_3 - B_2 - A_2 - x_k$, восстанавливаем все точки оптимальной траектории и последовательность оптимальных управлений.

$$x_0 = x_0^*; \quad E_2 = x_1^*; \quad x_0 - E_2 = u_0^*; \quad D_3 = x_3^*; \quad E_2 - D_3 = u_1^*;$$

$$C_3 = x_3^*; \quad D_3 - C_3 = u_2^*; \quad B_2 = x_4^*; \quad C_3 - B_2 = u_3^*; \quad A_2 = x_5^*;$$

$$B_2 - A_2 = u_4^*; \quad x_k \equiv x_6^*; \quad A_2 - x_k = u_5^*$$

На рис. 5.1 оптимальный маршрут отмечен двойной линией.

5.1. Инструкция к организации учебной работы (раздел 5)

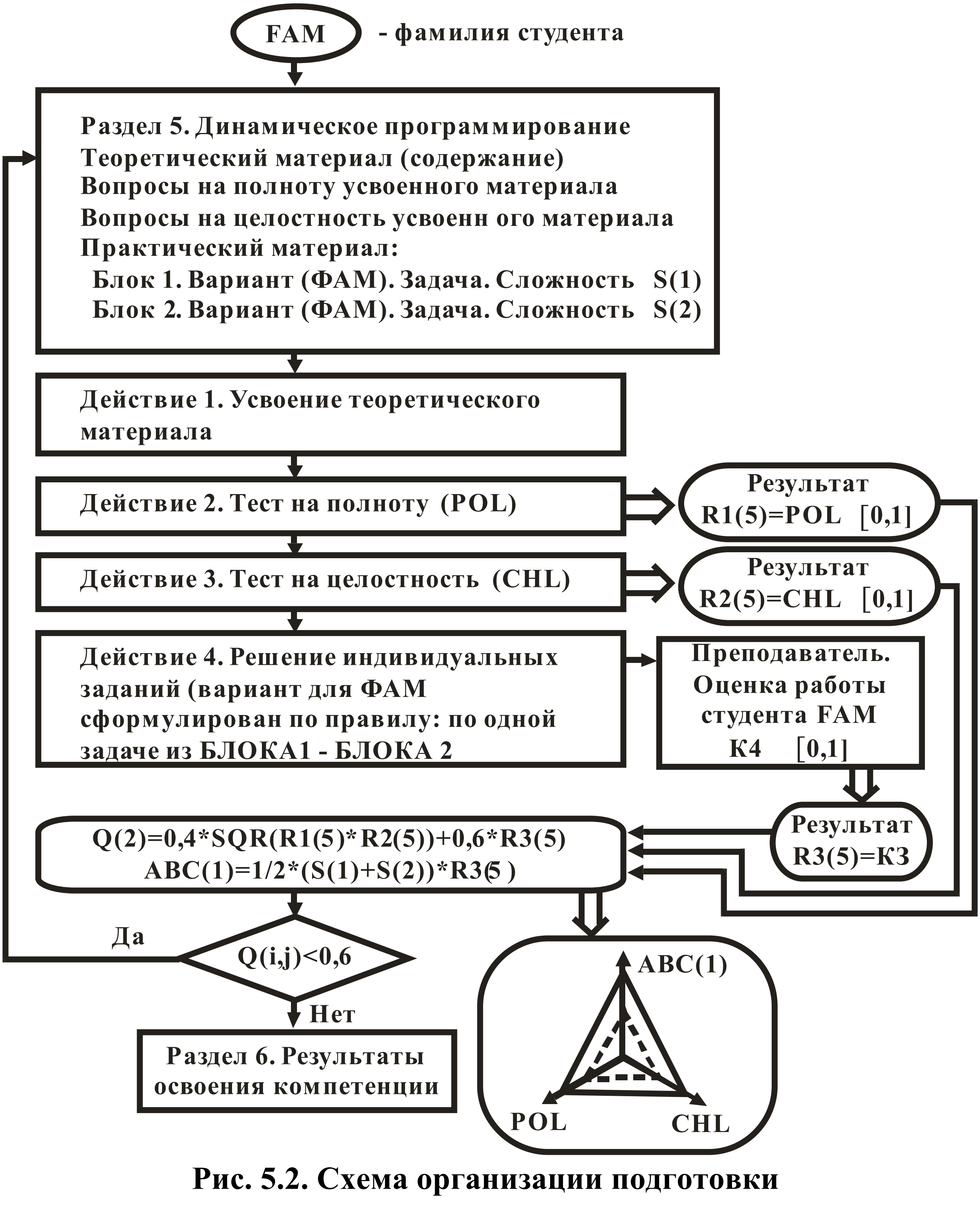


Рис. 5.2. Схема организации подготовки

5.2. Уравнение Беллмана

Рассмотрим технические аспекты реализации метода динамического программирования, т.е. алгебраическую процедуру отыскания последовательности условно оптимальных управлений $\left\{u^k\right\}$ при движении от одного конца траектории к другому и нахождения последовательности оптимальных управлений $\left\{u^{*k}\right\}$ и оптимальной траектории $\left\{x^{*k}\right\}$ при обратном движении. Итак, выбор управления при переходе из предпоследней в последнюю точку траектории осуществляется из условия максимизации суммы целевых функций в этих точках, т.е. решении задачи

$$\Phi_{p-1}(x^{p-1}) = max\left[f_{p-1}\left(x^{p-1},u^{p-1}\right) + f_p\left(x^p\right)\right],$$

или с учетом условия 3 $x^k = \varphi_{k-1}(x^{k-1},u^{k-1})$, которое устанавливает связь между соседними точками траектории

$$\Phi_{p-1}(x^{p-1}) = max\left[f_{p-1}\left(x^{p-1},u^{p-1}\right) + f_p\left(\varphi_{p-1}(x^{p-1},u^{p-1})\right)\right].$$

Фиксируя x^{p-1}, получаем простейшую оптимизационную задачу для функции одной переменной, решая которую, находим условно оптимальное управление $u^{p-1}(x^{p-1})$, зависящее, естественно, от того, как именно была зафиксирована точка x^{p-1}. Реализованная процедура повторяется в точке x^{p-2} и, с учетом полученного решения $\Phi_{p-1}(x^{p-1})$, решается аналогичная задача $\Phi_{p-2}(x^{p-2}) = max\left[f_{p-2}\left(x^{p-2},u^{p-2}\right) + \Phi_{p-1}(x^{p-1})\right]$, или, используя условие связи,

$$\Phi_{p-2}(x^{p-2}) = max\left[f_{p-2}\left(x^{p-2},u^{p-2}\right) + \Phi_{p-1}(\varphi_{p-2}(x^{p-2},u^{p-2}))\right],$$

откуда условно оптимальное управление на предпоследнем шаге определяется как $u^{p-2}(x^{p-2})$и зависит от положения точки x^{p-2}. Продолжая процесс построения рекуррентных соотношений, для некоторой произвольной внутренней точки траектории получим

$$\begin{aligned}\Phi_k(x^k) &= max\left[f_k\left(x^k,u^k\right) + \Phi_{k+1}\left(x^{k+1}\right)\right] = \\ &= max\left[f_k\left(x^k,u^k\right) + \Phi_{k+1}(\phi_k(x^k,u^k))\right]\end{aligned} \qquad (*)$$

откуда находим $u^k(x^k)$ и. т.д. вплоть до $u^0(x^0)$ и $\Phi_0(x^0)$. Но т.к. по определению $x^0 \equiv x^{*0} \Rightarrow \Phi_0(x^0) \equiv \Phi_0\left(x^{*0}\right)$ и $u^{*0} = u^0\left(x^{*0}\right)$. Используя уравнение связи, находим $x^{*1} = \phi_1(x^{*0}, u^{*0}), u^{*1} = u^1(x^{*0})$ и все последующие точки оптимальной траектории $\left\{x^{*k}\right\}$ и последовательность оптимальных управлений. Уравнение (*) носит название уравнения Беллмана, а функция $\Phi_k(x^k)$ называется функцией Беллмана. Таким образом, задача динамического программирования сводится к отысканию последовательности функций Беллмана путём решения p-1 оптимизационных задач.

Пример 24. Пусть имеется n технологических процессов, среди которых надо полностью распределить однородный ресурс так, чтобы максимизировать суммарный доход, получаемый в результате его использования. Использование ресурса в $i-$ ом процессе в количестве u_i приносит доход $f_i(u_i)$. Общее количество ресурса равно a. Тогда поставленная задача решается путем максимизации функции $f(u) = \sum_{i=1}^{n} f_i(u_i)$ при ограничении $\sum_{i=1}^{n} u_i = a$. Положим, что функции f_i имеют вид $f_i(u_i) = c_i\sqrt{u_i}\ \left(i = \overline{1,n}\right)$, где с помощью коэффициентов c_i учитываются особенности, характеризующие степень технического совершенства соответствующих процессов. Применим для решения этой задачи метод динамического программирования.

В первом процессе используется часть ресурса равная $u_1 = a - \sum_{i=2}^{n} u_i$, поэтому функция Беллмана запишется в виде: $\Phi_1(a - \sum_{i=2}^{n} u_i) = max\, c_1\sqrt{u_1} = c_1\sqrt{a - \sum_{i=2}^{n} u_i}$. Отсюда $u_1 = a - \sum_{i=2}^{n} u_i$. Во втором процессе (с учетом израсходованного в первом) используется часть ресурса равная $u_2 = a - \sum_{i=3}^{n} u_i$, поэтому для второго процесса функция Беллмана примет вид:

$$\Phi_2(a - \sum_{i=3}^{n} u_i) = max[c_2\sqrt{u_2} + c_1\sqrt{a - \sum_{i=2}^{n} u_i} .$$

Для нахождения u_2, при котором достигается максимум функции Беллмана, вычислим её производную по u_2 и приравняем результат к нулю.

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} = \frac{c_2}{2\sqrt{u_2}} - \frac{c_1}{2\sqrt{a - \sum_{i=2}^{n} u_i}} = 0, \text{ откуда } \frac{c_2^2}{u_2} - \frac{c_1^2}{a - u_2 - \sum_{i=3}^{n} u_i} = 0.$$

Отсюда $u_2 = \frac{c_2^2}{c_1^2 + c_2^2}(a - \sum_{i=3}^{n} u_i).$ Подставляя условно оптимальное значение u_2 в выражение для Φ_2 получим

$$\Phi_2(a - \sum_{i=3}^{n} u_i) = max\left[c_2\sqrt{u_2} + c_1\sqrt{a - u_2 - \sum_{i=3}^{n} u_i} \right] = \\ = \sqrt{\left(c_1^2 + c_2^2\right)\left(a - \sum_{i=3}^{n} u_i \right)}.$$

Для третьего процесса функция Беллмана будет:

$$\Phi_3(a - \sum_{i=4}^{n} u_i) = max\left[c_3\sqrt{u_3} + \sqrt{\left(c_1^2 + c_2^2\right)\left(a - \sum_{i=3}^{n} u_3 \right)} \right].$$

Решая, задачу максимизации обычным порядком найдем,

$$u_3 = \frac{c_3^2}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}(a - \sum_{i=4}^{n} u_i); \Phi_3(a - \sum_{i=4}^{n} u_i) = \\ = \sqrt{\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)\left(a - \sum_{i=4}^{n} u_i \right)}.$$

Продолжая, последовательное применение данной вычислительной процедуры ко всем процессам получим,

$$u_k = \frac{c_k^2}{\sum_{i=1}^{k} c_i^2}\left(a - \sum_{i=k+1}^{n} u_i\right);\ \Phi_k\left(a - \sum_{i=k+1}^{n} u_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} c_i^2 \left(a - \sum_{i=k+1}^{n} u_i\right)}.$$

Записывая функцию Беллмана для последнего процесса под номером n, и, учитывая ограничения на ресурсы, имеем $\Phi_n(a) = \sqrt{a \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i^2}$ и $u_n \equiv u_n^* = \frac{c_n^2 \cdot a}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}$. Подставляя это выражение в формулу для вычисления u_{n-1}, получим оптимальный расход ресурса для $n-1$ процесса

$$u_{n-1}^* = \frac{c_{n-1}^2 \cdot a}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}.$$

Последовательно продолжая, получим общее выражение для вычисления оптимального расходования ресурса в произвольном $k-$ом процессе

$$u_k^* = \frac{c_k^2 \cdot a}{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}.$$

Это позволяет сформулировать важный в практическом отношении, хотя и естественный вывод: чем выше уровень технического совершенства процесса, тем больше ресурсов должно в нем использоваться.

Рассмотрим еще один пример, в котором процедура метода динамического программирования реализуется численно.

Пример 25. Однородный ресурс в количестве $\text{X} = 10$ ед. может быть использован в течение n периодов времени двумя технологическими способами. Использование ресурса в течение одного периода $i-$ым способом $\left(i = \overline{1,2}\right)$ приносит прибыль $f_i(x)$ и при этом в результате амортизации выбывает k_i –ая часть используемого ресурса. Необходимо использовать имеющийся ресурс так, чтобы суммарная прибыль за все n периодов была наибольшей, если $n = 5;\ f_1(x) = x^2;\ f_2(x) = 2x^2;\ k_1 = 0{,}25;\ k_2 = 0{,}7$. Обозначим $x_j(j = \overline{1,5})$ – количество ресурса, используемого в j – период времени; y_j – количество ресурса, используемого в j – ый период первым способом; z_j – количество ресурса, используемого в j – период вторым способом. Тогда $z_j = x_j - y_j$. С учетом вида функций прибыли и амортизационных потерь уравнение Беллмана для данной задачи будет:

$$\Phi_j(x_j) = max\left[y_j^2 + 2z_j^2 + \Phi_{j+1}(x_j - k_1 y_j - k_2 z_j)\right] \quad j = \overline{1,5}.$$

Поскольку по итогам последнего периода амортизация не подсчитывается $\Phi_{n+1} \equiv 0$, а значит максимум прибыли в последнем, пятом, периоде достигается если весь оставшийся ресурс будет использован способом №2, т.к. $2x^2 > x^2$ для $\forall x$. Таким образом $x_5 = z_5$, а максимально возможная прибыль в пятом периоде $2z_5^2 = 2(x_5 - y_5)^2$. Но в пятом периоде используется лишь то, что осталось после четвертого, т.е. $x_5 = x_4 - 0{,}25y_4 - 0{,}75z_4 = 0{,}3x_4 - 0{,}45y_4$. С учетом этого уравнение Беллмана для j=4 примет вид

$$\Phi_4(x_4) = max\left[y_4^2 + 2(x_4 - y_4)^2 + 2x_5^2\right] =$$
$$= max\left[y_4^2 + 2(x_4 - y_4)^2 + 2(0{,}3x_4 + 0{,}45y_4)^2\right],$$

а после элементарных преобразований $\Phi_4(x_4) = max\left[3{,}405y_4^2 - 3{,}46x_4y_4 + 2{,}18x_4^2\right]$.

Т.к. функция выпукла, то максимума она достигает на концах интервала наблюдения, иначе говоря, максимальная прибыль получается при использовании ресурса <u>либо</u> первым, <u>либо</u> вторым способом. Разделение ресурса в течение рабочего периода заведомо неэффективно. Следовательно, либо $x_4 = y_4$ – ресурс полностью используется первым способом, либо $x_4 = z_4$ – ресурс полностью используется вторым способом, в этом случае, очевидно $y_4 = 0$. В первом случае $\Phi_4' = 2{,}125x_4$, а во втором $\Phi_4'' = 2{,}18x_4$. Поскольку $\Phi_4'' > \Phi_4'$ в четвертом периоде целесообразно использовать ресурс вторым способом, т.е. $x_4 = z_4$, а $y_4 = 0$. Но в четвертом периоде используется лишь то, что осталось после третьего, следовательно

$$\begin{aligned}&\Phi_3(x_3) = max\left[y_3^2 + (x_3 - y_3)^2 + 2{,}18x_4\right] = \\ &= max\left[y_3^2 + 2(x_3 - y_3)^2 + 2{,}18(0{,}3x_3 + 0{,}45y_3)\right]\end{aligned}.$$

После преобразований $\Phi_3(x_3) = max\left[3{,}4415y_3^2 + 3{,}4114x_3y_3 + 2{,}1962x_3^2\right]$. Используя выпуклость, находим $\Phi_3' = 2{,}22635x_3^2$ при $y_3 = x_3$ и $\Phi_3'' = 2{,}1962x_3^2$ при $y_3 = 0$.

В этом случае, $\Phi_3' > \Phi_3''$ поэтому в течение третьего периода ресурс следует использовать первым способом. Действуя аналогично получим

$$\begin{aligned}&\Phi_2(x_2) = max\left[y_2^2 + 2(x_2 - y_2)^2 + 2{,}2263x\right] = \\ &= max\left[3{,}4508y_2^2 - 3{,}3989x_2y_2 + 2{,}2004x_2^2\right]\end{aligned}$$

откуда $\Phi_2' = 2{,}2523x_2^2$ при $y_2 = x_2$ и $\Phi_2'' = 2{,}2004x_2^2$ при $y_2 = 0$. Т.е. во втором периоде ресурс должен использоваться первым способом. На начало первого периода в наличие имеется полный запас ресурса в количестве 10 ед. поэтому уравнение Беллмана запишется в виде

$$\begin{aligned}&\Phi_1(10) = max\left[y_1^2 + 2(10 - y_1)^2 + 2{,}2523\left(3 - 0{,}45y_1\right)^2\right] = \\ &= max\left[3{,}4561y_1^2 - 33{,}9187y_1 + 220{,}2707\right]\end{aligned}$$

$\Phi_1'(10) = 226{,}69$ при $y_1 = 10$, $\Phi_1''(10) = 220{,}2707$ при $y_1 = 0$, т.е. в первом периоде весь начальный запас ресурса следует использовать первым способом. Теперь вычислим окончательный вариант использования ресурса и максимальную прибыль. По результатам первого периода прибыль составит $\Phi_1^*(10) = 100$, при этом задействован будет первый способ, т.е. $y_1 = 10$, $z_1 = 0$. С учетом амортизационных потерь на начало второго периода остается $x_2 = x_1(1-k_1) = 7,5$ ед. ресурса. Во втором периоде ресурс используется первым способом, т.е. $y_2 = 7,5,\ z_2 = 0$, при этом прибыль составит $\Phi_2^*(7,5) = 56,25$, а количество ресурса, перешедшее в третий период, составит $x_3 = x_2(1-k_1) = 5,6$ ед. Т.к. в третьем периоде ресурс вновь используется первым способом $y_3 = 5,6,\ z_3 = 0$, а прибыль составит $\Phi_3^*(5,6) = 31,36$, количество ресурса на начало четвертого периода $x_4 = x_3(1-k_1) = 4,2$ ед. В четвертом периоде ресурс используется вторым способом, поэтому $y_4 = 0,\ z_4 = 4,2$, прибыль составит $\Phi_4^*(4,2) = 35,28$, а остаток ресурса на начало последнего периода $x_5 = x_4(1-k_2) = 1,3$. Т.к. оставшийся ресурс используется вторым способом, то $y_5 = 0,\ z_5 = 1,3$, а величина прибыли $\Phi_5^*(1,3) = 3,38$. Величина итоговой прибыли по результатам всех периодов будет равна $W^* = \sum_{j=1}^{5} \Phi_j^* = 226,27$.

5.3. Пример алгоритмического решения задачи

Задача. Водитель планирует поездку из пункта Н в пункт К. На пути следования имеется ряд перекрестков, откуда продолжать движение к месту назначения можно по одному из двух направлений: «северному» и «восточному». Время в пути между соседними перекрестками зависит от условий движения и предполагается известным. Необходимо выбрать оптимальную конфигурацию маршрута, минимизирующую общее время поездки.

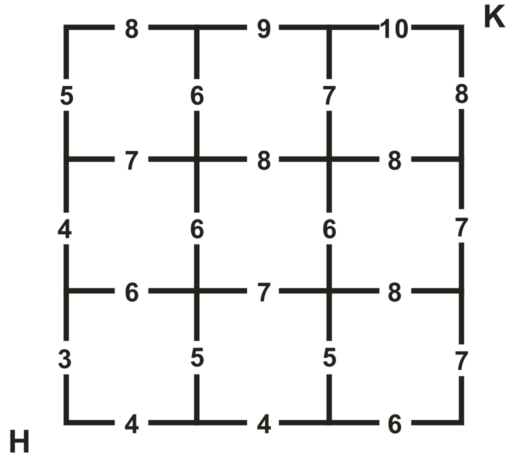


Рис. 5.3. Модель расположения дорог с заданным временем прохождения каждого участка

Вся операция (план) состоит из 6 шагов. Поиск решения начинается с конца.

Шаг 6

1) ставятся два кружка (ближайшие узлы к точке К);

2) в каждом кружке указывается время перехода к точке К и отмечается стрелкой возможное направление пути.

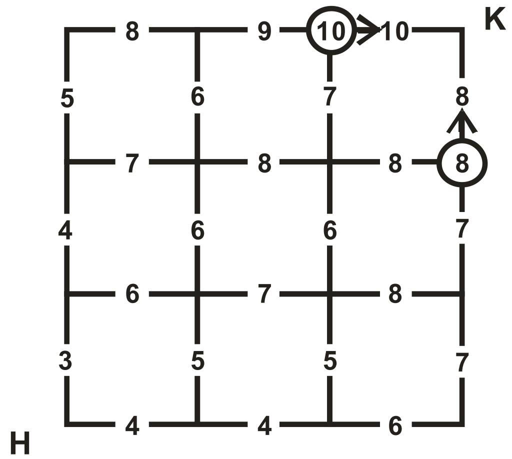


Рис. 5.4. Модель возможных переходов (шаг 6)

Шаг 5

1) ставятся три кружка (ближайшие к предыдущим кружкам);

2) в каждом кружке указывается время перехода к точке К и отмечается стрелкой возможное направление пути.

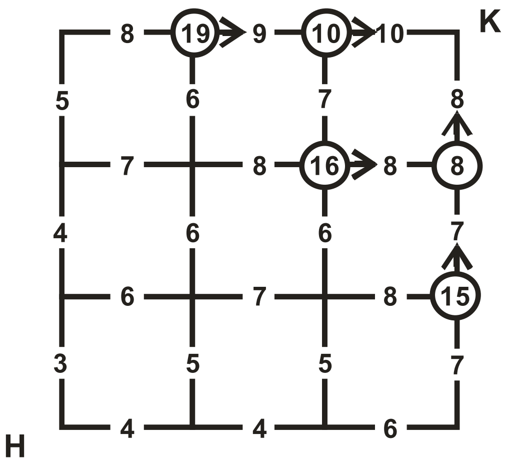


Рис. 5.5 Модель возможных переходов (шаг 5)

Шаг 4

1) ставятся четыре кружка (ближайшие к предыдущим кружкам);

2) в каждом кружке указывается время перехода к точке К и отмечается стрелкой возможное направление пути.

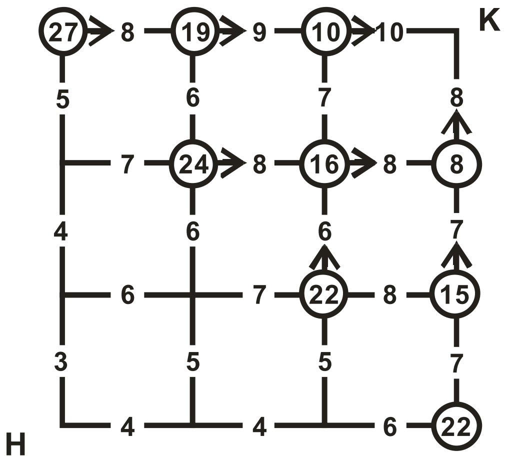


Рис. 5.6. Модель возможных переходов (шаг 4)

Шаг 3

1) ставятся три кружка (ближайшие к предыдущим кружкам);;

2) в каждом кружке указывается время перехода к точке К и отмечается стрелкой возможное направление пути.

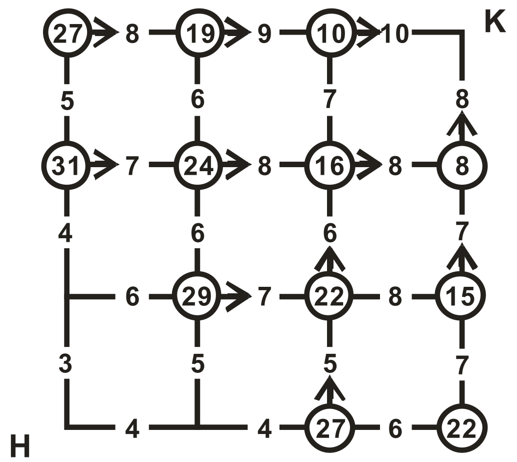


Рис. 5.7. Модель возможных переходов (шаг 3)

Шаг 2

1) ставятся два кружка (ближайшие к предыдущим кружкам);

2) в каждом кружке указывается время перехода к точке К и отмечается стрелкой возможное направление пути.

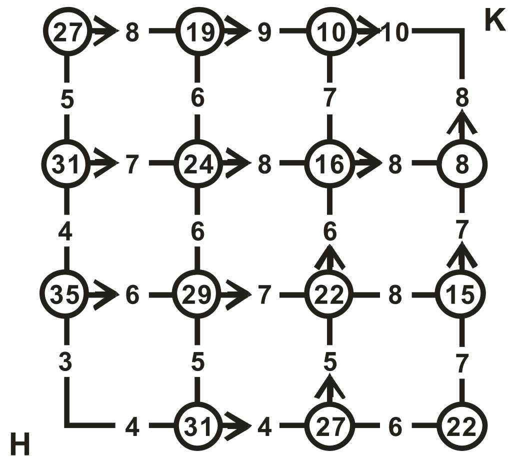


Рис. 5.8. Модель возможных переходов (шаг 2)

Шаг 1.

1) ставится один кружок (ближайший к предыдущим кружкам);

2) в кружке указывается время перехода к точке К и отмечается стрелкой возможное направление пути.

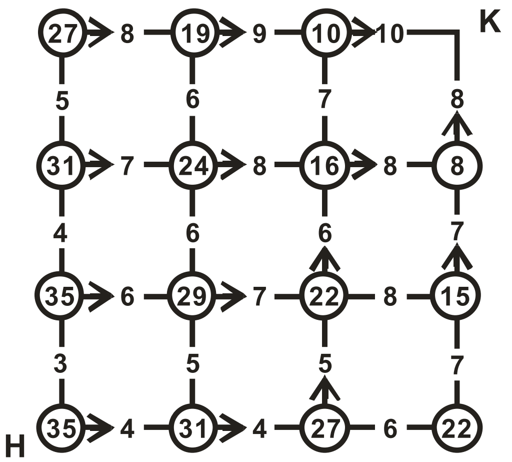


Рис. 5.9. Модель возможных переходов (шаг 1)

Результат: Из точки Н (согласно стрелкам) прокладывается путь к точке К. Кратчайший путь прочерчен двойной линией. Его протяженность W_{min}=35.

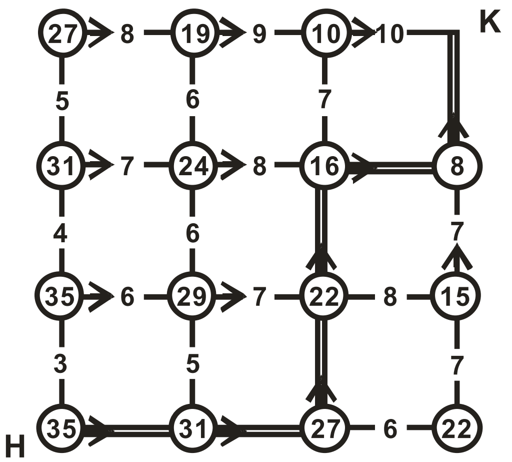


Рис. 5.10. Оптимальный план из 6 шагов из точки Н в точку К

5.4. База вопросов для тестового контроля

Комментарий. Сложность теста Т (трудоемкость в минутах / работы) оценивается экспертом, т.е. устанавливается за сколько минут непрерывной работы эксперт способен ответить на все вопросы теста. В целом, методика оценки следующая:

1. Оценивается трудоемкость ответа эксперта на один вопрос из теста, например, ему требуется 1 (мин/раб).

2. Тест, например, содержит 5 вопросов одинаковой сложности, случайным образом отобранных из базы вопросов, тогда S(T) = 5.

3. «Среднестатистическому» студенту для ответа, в целом, на тест требуется в 3 раза больше (мин/раб). Исходя из этого, на тест необходимо отпустить 15 (мин/раб).

Тест 5. Вопросы для оценки качества полноты (POL) усвоенных знаний (модуль 5)

1. Какие переменные в задачах динамического программирования называются фазовыми

a) переменные, которые могут не зависеть от времени;

*b) переменные, которые в каждый момент времени определяют состояние динамического процесса;

c) переменные, не зависящие от управляющих переменных.

2. Выберете верное утверждение:

a) фазовые переменные могут принимать только положительные значения;

*b) фазовые переменные зависят от времени;

*c) фазовые переменные зависят от выбора управления;

d) число фазовых переменных не может быть больше числа управлений.

3. Что такое траектория динамического процесса?

*a) значения фазовых переменных, зафиксированные в следующие друг за другом моменты времени;

b) значения фазовых переменных и управлений, зафиксированные в следующие друг за другом моменты времени;

c) значения целевой функции задачи динамического программирования, зафиксированные в следующие друг за другом моменты времени.

4. Выберете верные из приведенных утверждений:

a) число точек траектории всегда равно числу управлений;

b) число точек траектории не может быть больше числа управлений;

*c) число точек траектории не может быть меньше числа управлений;

d) ни одно из приведенных утверждений не верно.

5. Выберете верные утверждения, характеризующие начальную точку траектории динамического процесса:

*a) эта точка принадлежит оптимальной траектории;

b) в этой точке значение целевой функции задачи динамического программирования равно нулю;

c) в этой точке не надо выбирать управление.

6. Какие из перечисленных показателей могут быть использованы в качестве целевых функций задачи динамического программирования?

a) себестоимость;

*b) объем выпуска продукции

c) фондоотдача;

*d) издержки производства.

7. Если в процессе решения задачи динамического программирования оптимальных траекторий оказалось две или более, это означает:

a) неверно записаны или решены управления Беллмана;

b) в исходных данных имеет ошибка;

*c) это вполне возможно и ничего особенного не означает

8. Может ли при решении задачи динамического программирования условно оптимальное управление совпадать с оптимальным?

a) нет, не может;

b) может только в начальной и конечной точках траектории;

*c) они совпадают во всех точках оптимальной траектории.

9. Какие задачи относятся к классу задач динамического программирования?

*a) экстремальные задачи, перемененные которых явно зависят от времени;

б) экстремальные задачи, переменные которых нелинейно зависят друг от друга;

в) экстремальные задачи, целевые функции которых не являются непрерывными.

10. Какие из перечисленных параметров, характеризующих экономическую деятельность предприятия, являются аддитивными функциями: прибыль; норма прибыли; эксплуатационные затраты?

а) прибыль;

*b) прибыль и эксплуатационные затраты;

c) все перечисленные параметры являются аддитивными функциями.

Тест 5. Вопросы для оценки качества целостности (CHL) усвоенных знаний (раздел 5)

1. Как правильно записывается условие «шаговости» динамического процесса?

*a) $x^k = \varphi_{k-1}\left(x^{k-1}, u^{k-1}\right),\ k = \overline{1, n}$;

b) $\varphi_k\left(x^k\right) = \varphi_{k-1}\left(x^{k-1}, u^{k-1}\right),\ k = \overline{1, n}$;

c) $\varphi_k\left(x^k\right) = \left(x^{k-1}, u^{k-1}\right),\ k = \overline{1, n}$.

2. Какие из перечисленных функций являются аддитивными?

$$f\left(x\right) = 2x_1 + sin^2 x_2 + x_3^5;\ \ g\left(x\right) = \frac{ln\, x_1 \cdot x_2}{tgx_3} - x_1 e^{x_2};$$

$$h\left(x\right) = x_1 - \sqrt{x_2} + 7^{x_3}$$

a) только функция $f\left(x\right)$;

*b) функции $f\left(x\right)$ и $h\left(x\right)$;

c) ни одна из указанных функций не аддитивна;

d) все приведенные функции аддитивны.

41. Должна ли функция, являющаяся решением задачи динамического программирования, достигать максимальных значений в каждой точке оптимальной траектории?

*a) нет;

b) да;

c) только в том случае, когда управляющие воздействия являются явными функциями времени.

4. Динамический процесс задан соотношением $y = 2t_k^2 - 2,3t_k + 5$. Укажите целое число, ближайшее к значению процесса в точке t_3.

a) 17;

*b) 16;

c) 10.

5. Зависимость переменной y от времени t задана соотношением $y(t) = t^3 - 2t + t + 4$. Указать, где правильно выполнена дискретизация функции $y(x)$ на отрезке $[0, \quad 4]$ с шагом 1 сек.

*a) $y_0 = 4; y_1 = 4; y_2 = 6; y_3 = 16; y_4 = 40;$

b) $y_0 = 0; y_1 = 1; y_2 = 2; y_3 = 3; y_4 = 4;$

c) $y_0 = 4; y_1 = 8; y_2 = 16; y_3 = 32; y_4 = 64$.

6. По условиям хранения денег в коммерческом банке каждый квартал производится начисление в размере 10% от хранимой суммы. Кроме того, за каждые полгода начисляется бонус, равный 5% первоначального взноса. Какая сумма будет на счёте после одного года, если первоначальная сумма вклада составляет 10000 руб.?

a) 17524 руб.;

b) 15246 руб.;

*c) 15746 руб.

7. Сколько уравнений Беллмана необходимо построить для решения задачи динамического программирования, если число точек траектории равно 58?

*a) 57;

b) 58;

c) 116.

8. Целевая функция задачи динамического программирования имеет вид $f(x,y) = 2x - y$, где x и y фазовые переменные. Оптимальная траектория имеет в своем составе четыре точки:

$(x_0, y_0) = (1, 1)$; $(x_1, y_1) = (1, 2)$;

$(x_2, y_2) = (2, 3)$; $(x_3, y_3) = (3, 2)$.

Найти решение задачи динамического программирования.

*a) 6;

b) 4;

c) 14.

9. Связь между фазовыми переменными и управлениями в задаче динамического программирования задана соотношением $x_{k+1} = x_k^2 \cdot u_k$. Найти x_3, если $x_0 = 1$, а последовательность управлений имеет вид $u_0 = 4$, $u_1 = 2$, $u_2 = 1$.

a) 1061;

*b) 1024;

c) 256.

10. Связь между фазовыми переменными к управлениями в задаче динамического программирования задана соотношением $x_{k+1} = x_k \cdot \frac{u_k^2}{2}$. Найти x_3, если $x_0 = 4$, а последовательность управлений имеет вид $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 2$.

*a) 8;

b) 18;

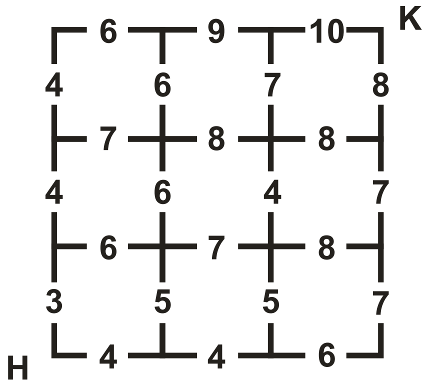
c) 32.

5.5. База учебных проблем и задач

Комментарий. Сложность (трудоемкость в минутах / работы) задачи X оценивается экспертом, т.е. за сколько минут непрерывной работы эксперт способен решить эту задачу. Например, эксперт способен решить задачу X за 15 (мин/раб). Будем считать, что сложность задачи X равной S(X) = 15. Как следует из статистических данных, «среднему» студенту для решения задачи X требуется в 5 раз больше мин/раб, поэтому ему отпускается 75 (мин/раб).

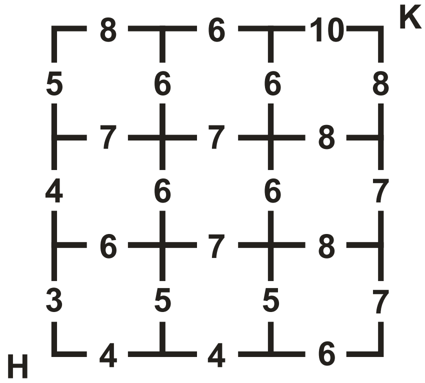
Блок задач 1

№ 1. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.). Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



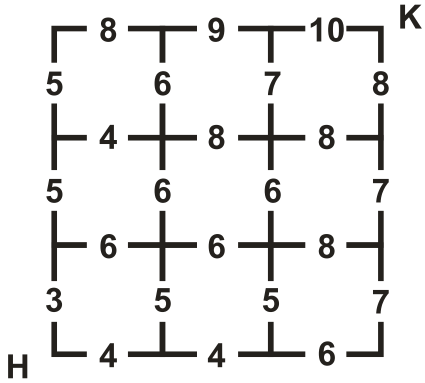
Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

№ 2. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.). Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



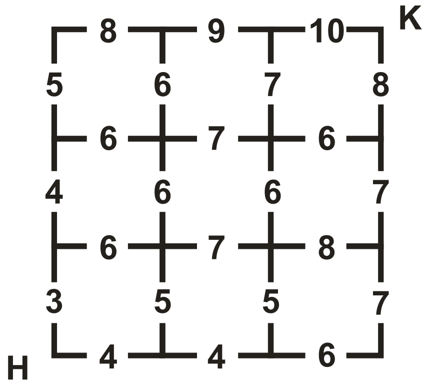
Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

№ 3. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.). Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

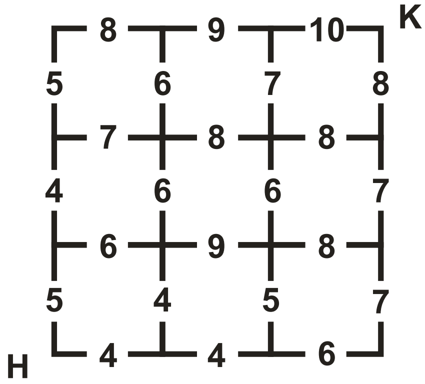
№ 4. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.). Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

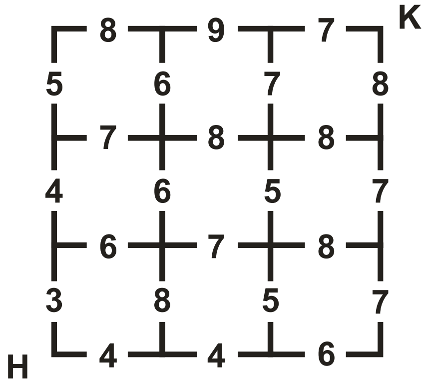
№ 5. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов.

Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.). Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

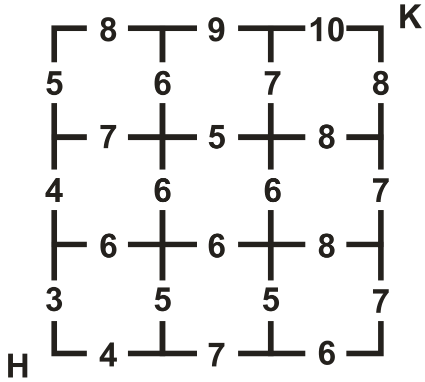
№ 6. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.). Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

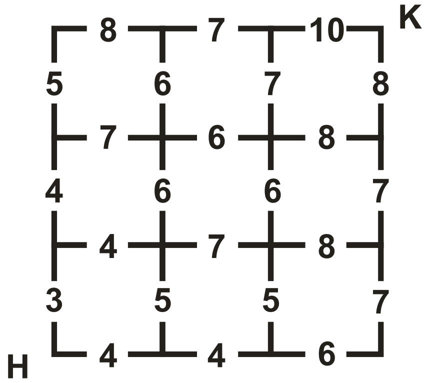
№ 7. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.).

Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



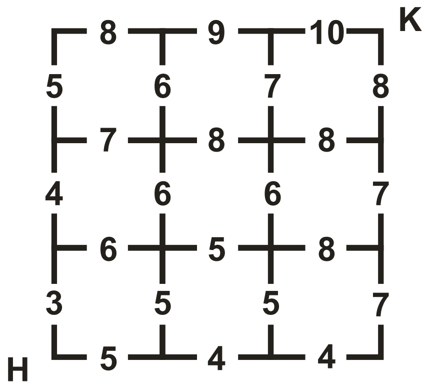
Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

№ 8. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.). Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



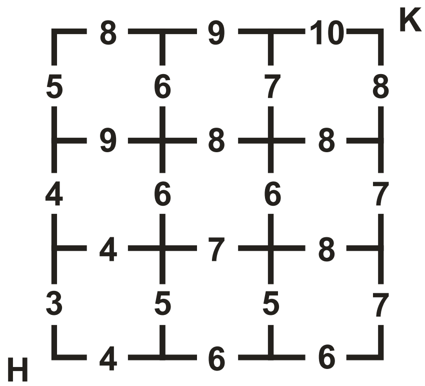
Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

№ 9. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.). Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



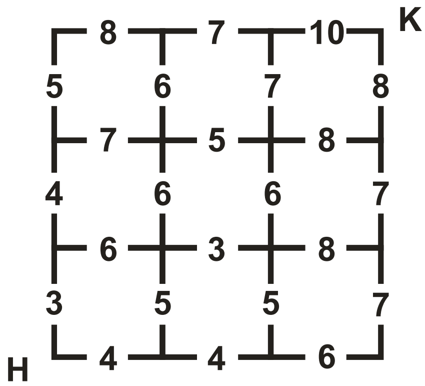
Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

№ 10. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.). Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



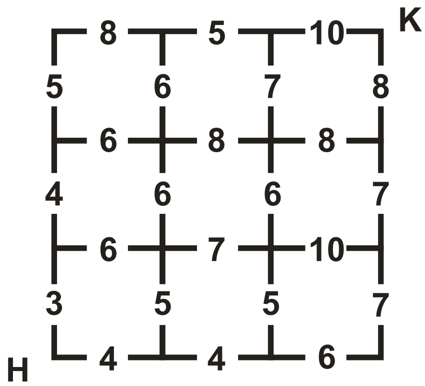
Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

№ 11. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.). Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

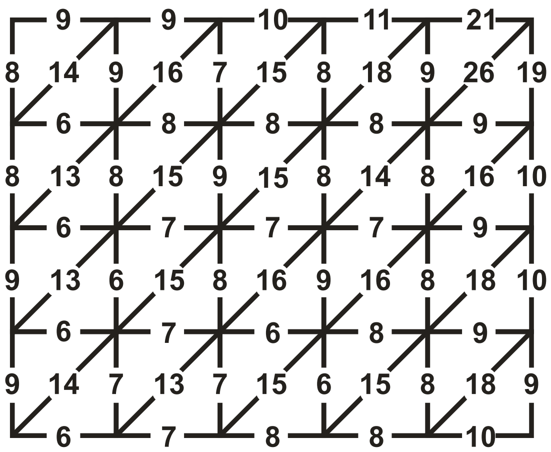
№ 12. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться только строго на север или на восток. Таким образом, путь представляет собой ломанною ступенчатую линию. Затраты на сооружение каждого участка известны (см. рис.). Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты минимальны.



Время решения задач экспертом – 15 (мин/раб).

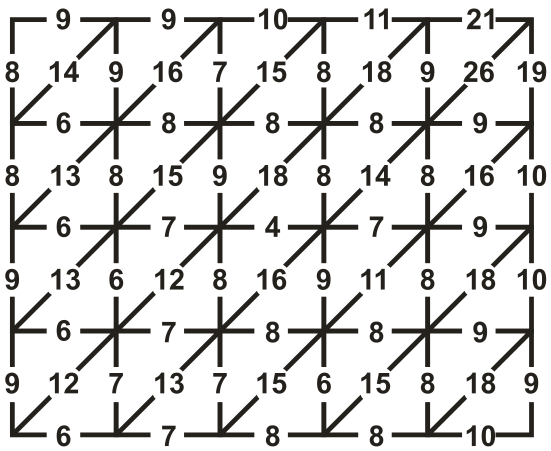
Блок задач 2

№ 1. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



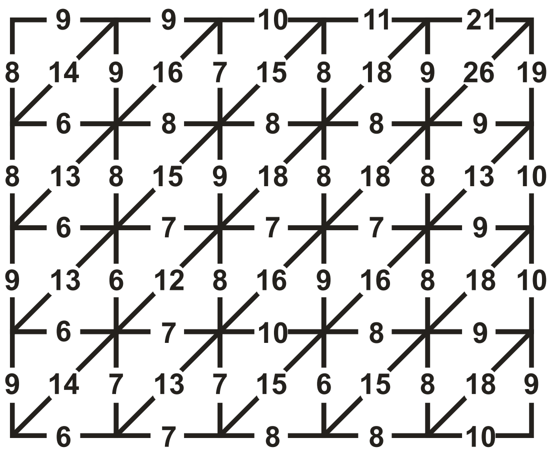
Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

№ 2. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



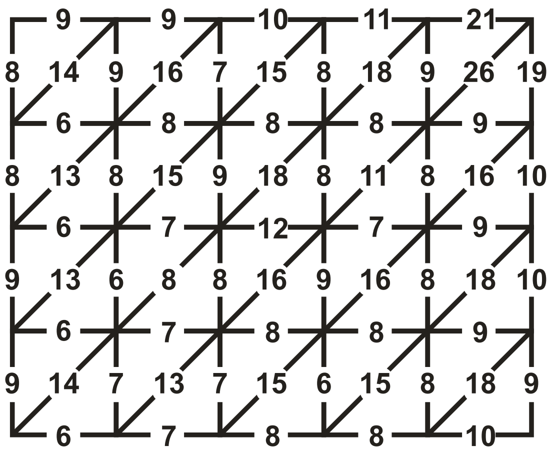
Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

№ 3. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



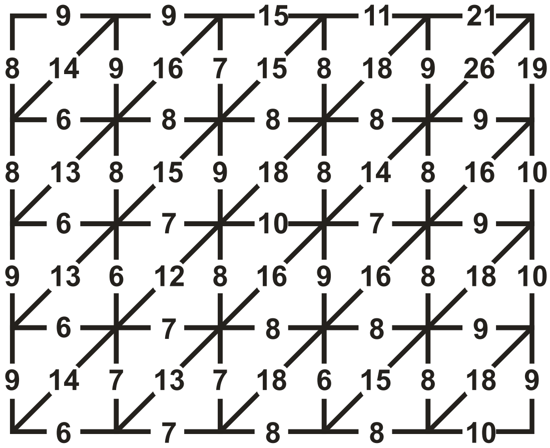
Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

№ 4. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



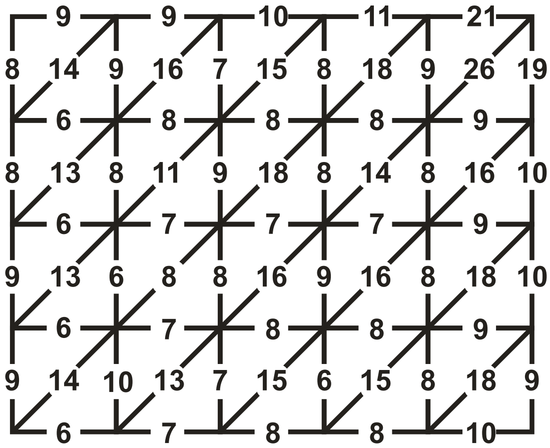
Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

№ 5. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



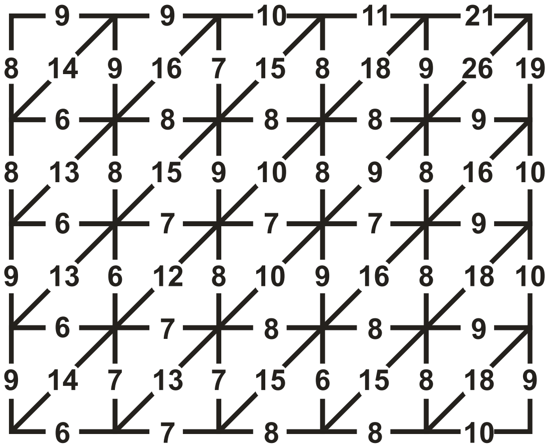
Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

№ 6. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



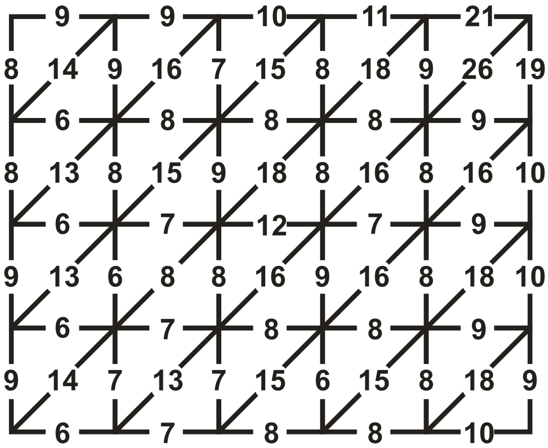
Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

№ 7. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



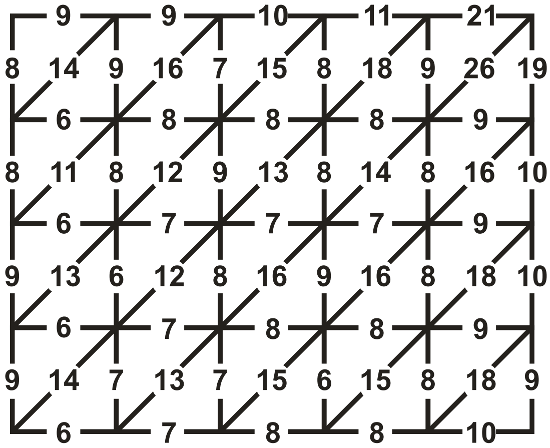
Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

№ 8. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



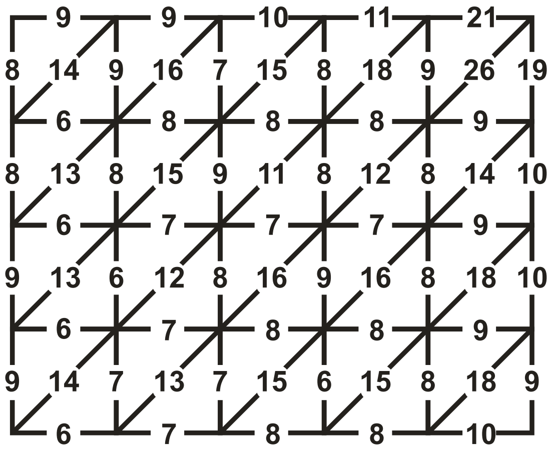
Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

№ 9. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



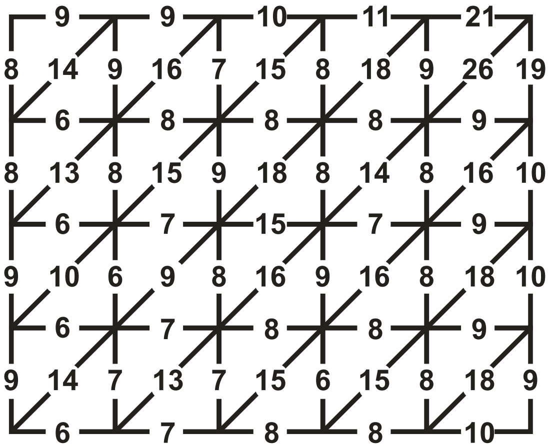
Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

№ 10. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



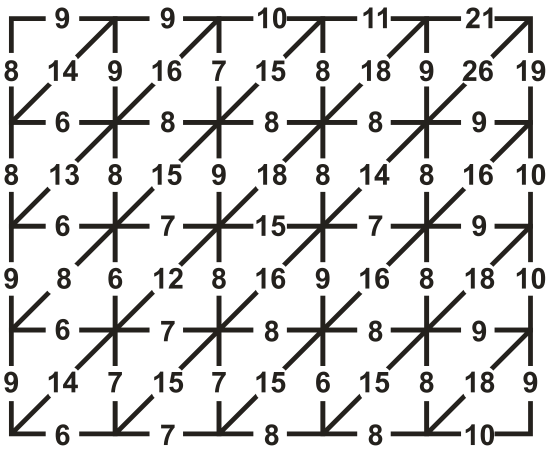
Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

№ 11. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

№ 12. Необходимо построить путь, соединяющий два пункта Н и К. Предполагается, что прокладка пути состоит из ряда шагов. Причем можно двигаться строго на север или на восток или по диагонали (см. рис.). Таким образом, путь представляет собой ломанною линию (см. рис.). Затраты на сооружение каждого участка известны. Требуется спланировать путь, при котором суммарные затраты будут минимальны.



Время решения задач экспертом – 90 (мин/раб).

Раздел 6. Инструкция к оценке результатов

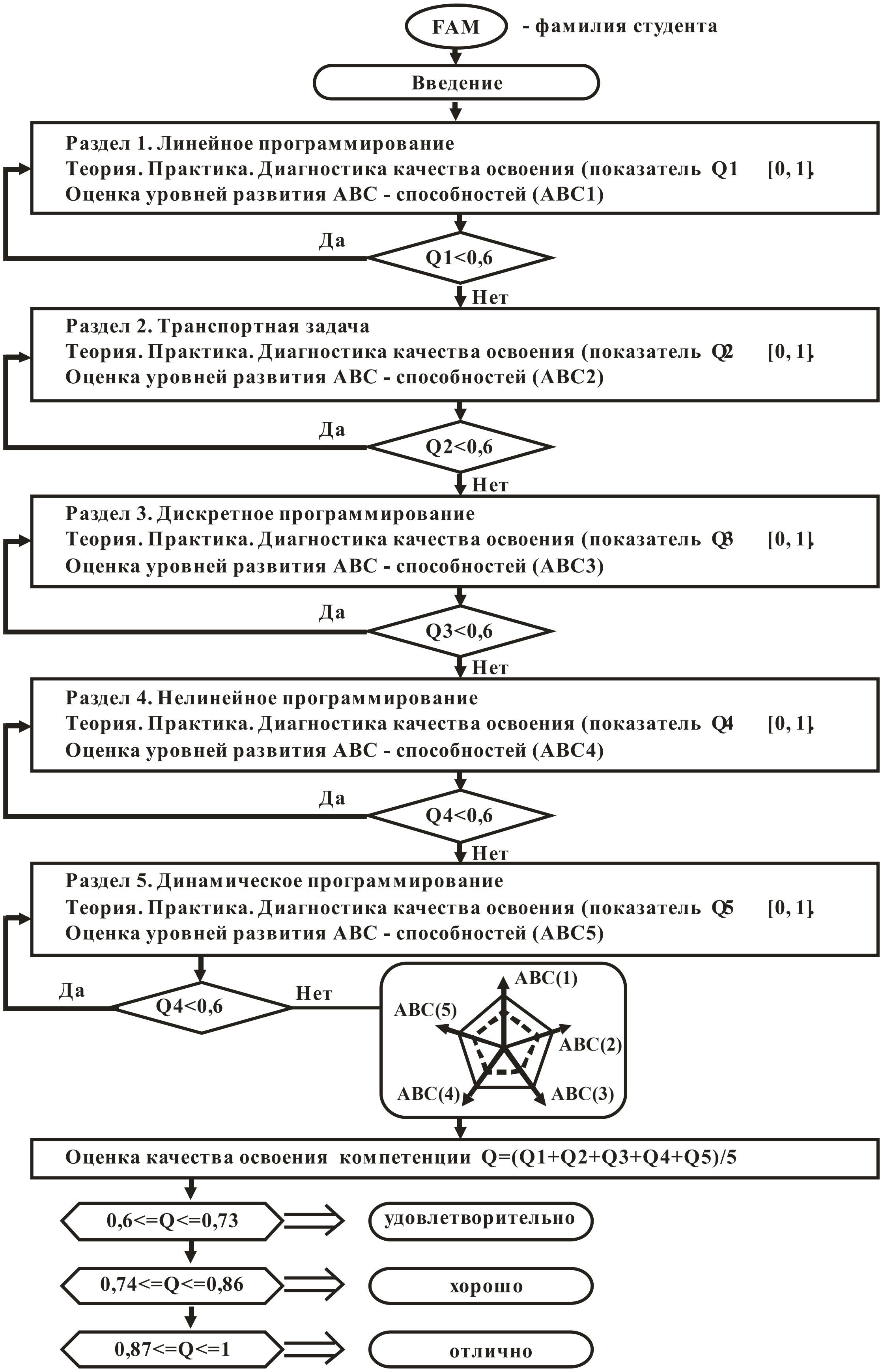


Рис. 6.1. Схема формирования результатов

Очевидно, что любая система подготовки ограничена своим «обучающим» потенциалом, т.е. может обеспечить уровни развития АВС-способностей и углубление знаний только до какого-то «порога» сложности в решении проблем. Цель студента, используя весь потенциал пособия развить свои АВС-способности до этого порога.

На рис. 6.2. приводится модель ситуации развития АВС-способностей студента в рамках каждого раздела пособия.

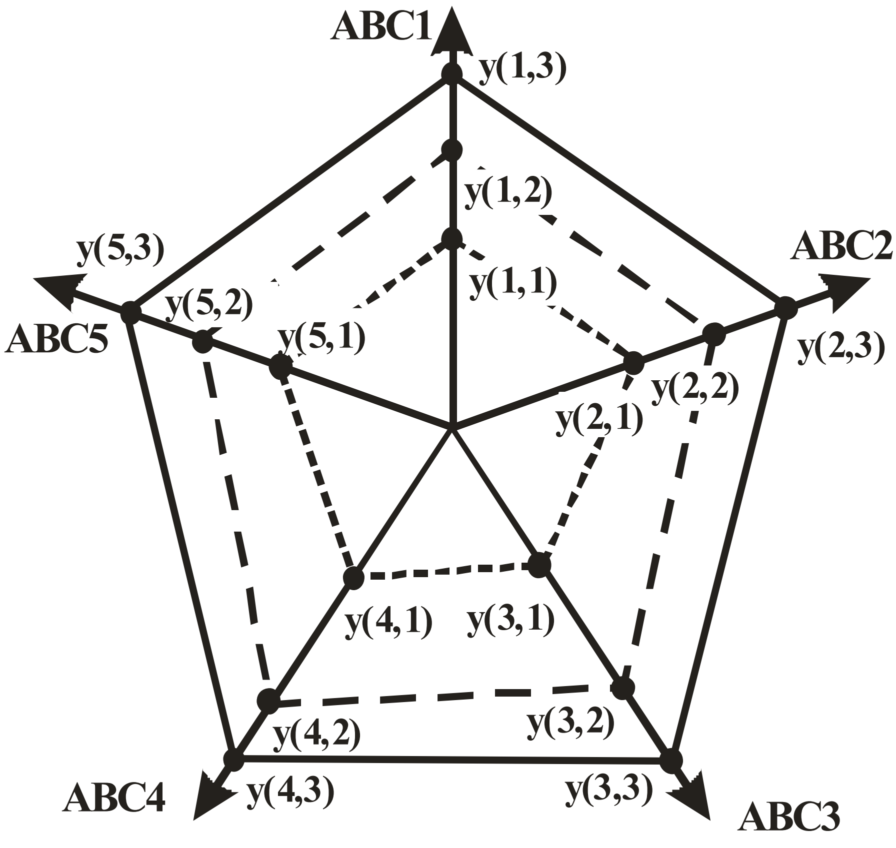


Рис.6.2. Модель состояния развития АВС-способностей студента

По окончании подготовки, формально все достижения студента можно представить в виде двух таблиц: метрические показатели его способностей (рис. 6.3); метрические показатели, им усвоенных знаний (рис. 6.4).

		Номера разделов				
	$i \backslash j$	1	2	3	4	5
Показатели способностей	Начальный	$y(1,1)$	$y(1,2)$	$y(1,3)$	$y(1,4)$	$y(1,5)$
	Конечный	$y(2,1)$	$y(2,2)$	$y(2,3)$	$y(2,4)$	$y(2,5)$
	Пороговый	$y(3,1)$	$y(3,2)$	$y(3,3)$	$y(3,4)$	$y(3,5)$

Рис. 6.3. Матрица показателей способностей

Комментарий. Начальный уровень развития АВС-способностей, т.е. величины $y(1,j)$, $j=\overline{1,5}$ может быть идентифицирован за счет входного тестирования на целостность знаний через решение несложных примеров по смежным дисциплинам.

		Номера разделов				
	$i \backslash j$	1	2	3	4	5
Показатели знаний	полнота	$x(1,1)$	$x(1,2)$	$x(1,3)$	$x(1,4)$	$x(1,5)$
	целостность	$x(2,1)$	$x(2,2)$	$x(2,3)$	$x(2,4)$	$x(2,5)$

Рис. 6.4. Матрица показателей знаний

На основе этих показателей вычисляются все остальные метрики, т.е. интегральные показатели достижения студента. Основными показателями являются: Q-показатель качества освоения компетенций (показатель может меняться от 0 до 1); К(АВС)-показатель уровня развития АВС – способностей в рамках компетенций (размерность в минутах / работы эксперта); R(ABC)-показатель сложности учебного материала (ресурса) для освоения компетенций.

$$Q = 0{,}08[x(1{,}1)x(1{,}2) + x(1{,}2)x(2{,}2) + x(1{,}3)x(2{,}3) + x(1{,}4)x(2{,}4) + x(1{,}5) + x(2{,}5)] + 0{,}12[y(2{,}1) + y(2{,}2) + y(2{,}3) + y(2{,}4) + y(2{,}5)]$$

$$K(ABC) = \frac{1}{5}[y(2{,}1) + y(2{,}2) + y(2{,}3) + y(2{,}4) + y(2{,}5)]$$

$$R(ABC) = \frac{1}{5}[y(3{,}1) + y(3{,}2) + y(3{,}3) + y(3{,}4) + y(3{,}5)]$$

Итак, выделен комплекс из трех интегральных показателей успешности освоения компетенций студентом

$$< Q, \quad K(A,B,C), \quad R(ABC) >.$$

Все остальные показатели, например, скорость развития ABC-способностей, оценка успешности студента в интервале [2, 5] и т.д., также могут быть рассчитаны, исходя таблиц (рис. 6.3, 6.4). Теоритические и практические результаты подготовки по технологии обучения в метрическом компетентностном формате приведены в работах [13-25].

Литература

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие. – М.: Лань, 2011. – 352 с.

2. Аттетков А. В. Методы оптимизации: учебник / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 440 с.

3. Балдин К.В. Математическое программирование: учебник. – М.: Дашков и К^0, 2014. – 488 с.

4. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология: учеб. пособие для вузов. – М.:Дрофа, 2006. – 206 с.

5. Давыдов Е. Г. Элементы исследования операций / М.: Кнорус. – 2010. – 160 с.

6. Карманов В. Г. Математическое программирование: учебник. – М.: Физматлит, 2009. – 264 с.

7. Кузнецов А. В. Высшая математика. Математическое программирование: учебник / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – Минск: Вышэйшая школа, 2003. – 286 с.

8. Лежнёв А.В. Динамическое программирование в экономических задачах: учебное пособие / А. В. Лежнёв. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. – 176 с.

9. Ржевский С. В. Исследование операций: учебник. – М.: Лань, 2013. – 480 с.

10. Соболь Б.В. Методы оптимизации. Практикум: учебное пособие / Б. В. Соболь, Б. И. Месхи, Г. И. Каныгин. – Ростов на Дону: Феникс, 2009. – 384 с.

11. Черняк А.А. Математическое программирование. Алгоритмический подход: учеб. пособие / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк, Ю.М. Метельский. – Минск: Вышэйшая школа, 2014. – 352 с.

12. Юрьева А.А. Математическое программирование: учебное пособие. – М.: Лань, 2014, 432 с.

13. Барон Л.А., Нуриев Н.К, Старыгина С.Д. Численные методы для IT инженеров: учебное пособие для вузов. – Казань: Центр инновационных технологий, 2012. – 176 с.

14. Дьяконов Г.С., Жураковский В.М., Иванов В.Г., Кондратьев В.В., Кузнецов А.М., Нуриев Н.К. Подготовка инженера в реально-виртуальной среде опережающего обучения. – Казань: КГТУ, 2009. – 404 с.

15. Нуриев Н.К., Журбенко Л.Н., Старыгина С.Д. Дидактические системы нового поколения // Высшее образование в России. – 2010. – № 8-9. – С.128-137.

16. Нуриев Н.К., Журбенко Л.Н., Старыгина С.Д. Системный анализ деятельности инженера. – Казань, Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, 2008. – 88 с.

17. Нуриев Н.К., Журбенко Л.Н., Шакиров Р.Ф., Хайруллина Э.Р., Старыгина С.Д., Абуталипов А.Р. Методология проектирования дидактических систем нового поколения. – Казань, Центр инновационных технологий, 2009. – 456 с.

18. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д. Эскизный проект дидактической системы природосообразно развивающего обучения // Альма-Матер – 2013. – № 3. – С.51-55.

19. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Ахметшин Д.А. Алгоритм оценки качества владения компетенцией на основе показателя глубины усвоенных знаний // Альма-Матер (Вестник высшей школы) – 2015. – № 11. – С. 64-67.

20. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Ахметшин Д.А. Дидактическая инженерия: проектирование программного обеспечения техногенной социально-образовательной среды вуза // Вестник Казанского технологического университета - 2015.– Т. 18. – № 24. – С. 109-114.

21. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Крылов Д.А. Дидактическая инженерия: метрическая оценка академической компетентности по технологии обучение-тест // Международный электронный журнал “Образовательные технологии и общество (Education Technology &

Society)” (http://ifets.ieee.org/russian/periodical/journal.html). – 2015. – V.18. – N 3. – С. 548-574. ISSN 1436-4522.

22. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Пашукова Е.В. Вычислительная математика в задачах химии и химической технологии: учебное пособие. – Казань: Центр инновационных технологий, 2011. – 200 с.

23. Нуриев Н.К., Старыгина С.Д., Печеный Е.А., Гайфутдинов А.А. Технология подготовки инженера в метрическом компетентностном формате в реально-виртуальной среде развития // Международный электронный журнал “Образовательные технологии и общество (Education Technology & Society)” (http://ifets.ieee.org/russian/periodical/journal.html). – V.15. – N 4. – С. 569-590 с. – ISSN 1436-4522.

24. Печеный Е.А., Нуриев Н.К., Старыгина С.Д. Экономико-математические модели в управлении: учеб. пособие. – Казань: Центр инновационных технологий, 2016. – 224 с.

25. Старыгина С.Д., Гибадуллина Э.А., Нуриев Н.К. Дидактическая инженерия: алгоритм оценки качества освоения студентом компетенций стандарта // Вестник Марийского государственного университета. – 2015. – № 4 (19). – С. 47-50.